ENSEIGNER LES PROBABILITÉS AU CYCLE 4

https://www.sfds.asso.fr
http://maths.ac-creteil.fr

Journées APMEP NANTES
22 octobre 2017

Fabienne GLEBA
Professeure au collège De Lattre – Le Perreux-sur-Marne

Philippe DUTARTE
IA-IPR de mathématiques
Académie de Créteil

Avec la contribution de :

Aurélie ARNOULD	Collège Jean Lurçat 94 Villejuif
Christine CORNET	Collège Alfred Sisley 77 Moret-sur-Loing
Pascal FABRÈGUES	Collège Condorcet 77 Pontault-Combault
Valérie HERNANDEZ	Collège du Montois 77 Donnemarie-Dontilly

SOMMAIRE

Les probabilités s'enseignent dorénavant en France dès la classe de cinquième. Cela suppose une nouvelle progressivité des apprentissages, davantage de place à l'expérimentation, à la définition des concepts et à l'élaboration du lien qu'entretiennent probabilités et statistique. Nous analysons ici, à la lumière de pratiques pédagogiques menées en France et à l'étranger, certains points nous semblant incontournables d'une progression de l'apprentissage des probabilités au collège prenant appui sur l'expérimentation et la statistique.

Deux principes incontournables

Deux principes pédagogiques nous semblent incontournables dans les premiers apprentissages de la notion de probabilité : d'une part, partir d'une évaluation des conceptions a priori des élèves sur le hasard, d'autre part, exploiter, dès le début de l'apprentissage, une double approche empiriste et théorique de la notion de probabilité.

Partir d'une évaluation des conceptions a priori des élèves

L'être humain possède certaines conceptions a priori du hasard qui peuvent être causes d'erreur ou d'incompréhension. Il est particulièrement utile de tester certains « biais » dus à des conceptions a priori des élèves et d'en débattre avant de débuter un « enseignement » des probabilités comme si le terrain était vierge.

Parmi ces « idées fausses », citons (la liste n'est pas exhaustive) :

– le refus de mesure du hasard (tout est possible, on ne peut rien dire) ;

– le biais d'équiprobabilité (a priori tous les cas possibles sont équiprobables) ;

– le biais d'alternance (on imagine certaines régularités du hasard et, à pile ou face, PFFP semblera plus probable que PPPP par exemple) ;

– l'effet mémoire (si l'on a eu quatre fois pile on a plus de chances d'avoir face au prochain lancer ; on applique la loi des grands nombres sur des petits nombres) ;

– la confusion effectifs-fréquence (la probabilité correspond à un effectif et non à une fréquence) ou une erreur sur la base d'évaluation d'une proportion ;

– mauvaise prise en compte de la taille de l'échantillon…

Il paraît nécessaire de tester ces conceptions, de réaliser des expériences aléatoires (éventuellement prolongées par la simulation) pour montrer que les observations sont en contradiction avec certaines opinions a priori.

Exploiter une double approche empiriste (approche fréquentiste) et théorique (approche classique a priori)

Ni l'approche empirique, expérimentale, ni l'approche théorique, classique, de la notion de probabilité ne permettent à elles seules d'en comprendre les différentes dimensions. Il est nécessaire de développer ces deux idées simultanément et d'en montrer la dépendance, particulièrement dans le cadre de la modélisation.
À ce propos, le didacticien Heinz Steinbring (1991) s'exprime ainsi :

> « Il est nécessaire de créer un cadre éducatif dans lequel les liens mutuels entre probabilités et hasard, aussi bien qu'entre les différents concepts de probabilité, permettent aux conceptions et à la théorie de se développer à l'unisson. Le processus d'enseignement doit répondre au paradoxe selon lequel la clarification et la compréhension des concepts fondamentaux [en probabilité] ne peut se réaliser qu'avec la théorie complète des cours d'enseignement des années à venir. Une condition nécessaire importante pour satisfaire à cette exigence en classe est d'éviter de développer l'éducation à l'aléatoire exclusivement en termes de fréquence ou de symétrie classique. […]
> Même un concept aussi élémentaire que l'équiprobabilité nécessite simultanément l'interprétation mathématique idéale d'égale distribution au sens arithmétique, et la représentation empirique du statistiquement équidistribué, telle qu'elle émerge des expériences concrètes. L'équidistribution comme modèle ne signifie pas que les résultats réels devraient être exactement équidistribués ; si cela se produit réellement c'est une raison suffisante pour douter de l'expérience. Le modèle de l'exacte équidistribution est requis comme référence pour décider si les fréquences observées peuvent être considérées comme issues d'une telle distribution uniforme, ou si les écarts sont trop grands pour une telle affirmation. […] Les relations entre objet et modèle doivent toujours rester à l'esprit durant le processus d'enseignement. La dialectique objet-modèle nécessite une approche mixte. »

Pour Heinz Steinbring, l'apprentissage de la notion de probabilité doit comporter les étapes suivantes :

– jugements personnels et « prédiction » à propos de phénomènes aléatoires ;
– comparaison entre les données empiriques (expérimentations) et différents modèles théoriques conjecturés (simulations éventuelles) ;
– création de principes généraux et caractérisation plus précise des phénomènes aléatoires.

Graham Jones, chercheur australien, fait le constat suivant dans un article de 2005 dressant l'état des lieux des recherches en didactique des probabilités.

> « Le contenu de ce que l'on doit enseigner en probabilités a connu plusieurs changements depuis plus de 15 ans [2005] durant lesquels les probabilités sont devenues une part du tronc commun d'enseignement. […] Les changements en cours ont conduit à mettre davantage en avant les probabilités expérimentales et leur lien avec les probabilités théoriques. De plus, en conséquence de ces changements, le lien puissant et historique entre probabilités et inférence statistique est devenu plus transparent. […] Les recherches et expérimentations pédagogiques de ces 15 dernières années ont conduit à un effort concerté pour lier statistique et probabilités en relevant les défis de « quoi enseigner » et « comment enseigner ». »

Des repères de progression des apprentissages

On peut distinguer trois niveaux d'apprentissage de la notion de probabilité au collège, pour lesquels nous indiquons ci-après quelques savoir-faire correspondants. Il serait extrêmement réducteur de considérer que ces niveaux correspondent aux attendus de chaque année du cycle 4 (cinquième, quatrième, troisième), ce qui serait d'ailleurs contraire à l'esprit curriculaire des programmes selon lequel il est souhaitable de différencier les apprentissages : les élèves pourront aborder une situation donnée à des niveaux différents.

Niveau 1 d'apprentissage :

– **expérimenter des jeux de hasard** simples, lister les issues possibles, **enregistrer les résultats observés dans un tableau d'effectifs et de fréquences**, choisir une stratégie en fonction de l'analyse des résultats ;
– maîtriser le **langage** des chances égales ou non, de jeu équitable ou non, connaître le fait que les dés, les pièces, les roulettes, les boules d'une urne… n'ont pas de mémoire ;
– comparer deux ou plusieurs événements en utilisant des relations comme « il est plus probable que… », « il est moins probable que… ». Utiliser une « échelle des probabilités ».

Niveau 2 d'apprentissage :

– **comparer des graphiques de distributions** (fréquentielle et théorique) en réalisant plusieurs fois une expérience aléatoire, **utiliser des simulations** ;
– observer la **fluctuation des fréquences pour un nombre de répétitions fixé** de l'expérience aléatoire, estimer une probabilité inconnue.

Niveau 3 d'apprentissage :

– **observer la stabilisation des fréquences** lorsqu'on augmente le nombre de répétitions de l'expérience aléatoire, faire le lien entre fréquence et probabilité en fonction du nombre de répétition ;
– concevoir des simulations simples ;
– utiliser des tableaux ou des arbres pour des calculs simples de dénombrement des cas ;
– calculer la probabilité de réalisation de deux événements s'excluant mutuellement et de deux événements complémentaires (règle de la somme) ;
– calculer la probabilité de réalisation de deux événements indépendants (règle du produit) ;
– traiter des expériences aléatoires à deux étapes.

Niveau 1 d'apprentissage et exemples d'activités

– Pratiquer des jeux de hasard simples. Lister les issues possibles. Anticiper des résultats. Vérifier par réalisation de l'expérience aléatoire puis, le cas échéant à l'aide d'une simulation fournie. Enregistrer les résultats observés dans un tableau d'effectifs et de fréquences. Repérer des variations et des régularités. Comparer des graphiques de distributions fréquentielles et théoriques. Choisir une stratégie en fonction de l'analyse des résultats.
– Maîtriser le langage des chances égales ou non, de jeu équitable ou non. Connaître le fait que les dés, les pièces, les roulettes, les boules d'une urne… n'ont pas de mémoire.
– Comparer deux ou plusieurs événements à partir de leurs résultats possibles, en utilisant des relations comme « il est plus probable que… », « il est moins probable que… ». Utiliser une « échelle des probabilités ».

Le programme de cycle 4 demande, dès le début du cycle, c'est-à-dire dès la classe de cinquième, « d'interroger les représentations initiales des élèves, en partant de situations de la vie quotidienne […], en suscitant des débats », d'introduire et de consolider « le vocabulaire lié aux notions élémentaires de probabilités (expérience aléatoire, issue, probabilité) », de calculer des probabilités en s'appuyant sur le modèle équiprobable et de mettre en œuvre « le lien avec les statistiques […] en simulant une expérience aléatoire, par exemple avec un tableur ».

Tester les conceptions a priori des élèves : un exemple de questionnaire

Voici des exemples de questions permettant de tester les conceptions a priori des élèves. Certaines des questions suivantes sont inspirées de l'article de Jacques VERDIER, où des réponses d'élèves sont analysées. Pour expliquer certaines réponses, des activités complémentaires sont parfois nécessaires et le recours à la simulation peut s'avérer utile.

Q1. En lançant un dé, qu'est-ce qui est le plus facile à obtenir : un 2 ou un 6 ?
Pourquoi ?
Q2. On joue avec deux dés, en les lançant chacun notre tour. Je prétends que c'est plus difficile pour moi de faire un double six que pour toi de faire un double trois.
Ai-je raison ?
Q3. « Si je lance simultanément deux pièces de 1 €, il y a une chance sur trois de voir un pile et un face » : cette affirmation est-elle vraie ou fausse ?
Q4. On lance quatre fois une pièce de 1 € et on note la suite des « pile » (P) ou « face » (F). Quel est le plus probable, obtenir PPPP ou obtenir PFFP ?
Q5. On lance plusieurs fois un dé dont trois faces sont bleues et trois faces sont jaunes. Que va-t-il se passer ?
Q6. On lance plusieurs fois un dé dont deux faces sont bleues et quatre faces sont jaunes. Que va-t-il se passer ?
Q7. Dans une boîte il y a trois boules noires et six boules blanches. Dans une autre, il y a sept boules noires et quatorze boules blanches. On prend au hasard une boule dans l'une des boîtes. Dans quelle boîte a-t-on le plus de chances d'avoir une boule noire ?
Q8. Jean a lancé une pièce de monnaie, et a obtenu 5 fois de suite FACE. Vous voulez la relancer ; pouvez-vous prévoir si ce sera PILE ou FACE ? Pourquoi ?

Q9. Céline et Paul jouent aux dés, chacun avec son dé. Mais Paul est un peu tricheur, et a échangé son dé avec un autre qui n'a que des 6 sur toutes les faces. Quand Céline lance son dé, peut-on prévoir quel numéro sortira ? Et quand Paul lance le sien ?
Pourquoi ?
Q10. On a fabriqué un dé spécial pour faire des paris. Il a trois faces avec un 1, deux faces avec un X, et une face avec un 2. Si on le lance, qu'est-ce qui sera le plus facile à obtenir ? Et qu'est-ce qui sera le moins facile ? Pourquoi ?
Q11. On lance deux dés. Si le total des deux est supérieur à 9, tu marques un point ; si cette somme est inférieure à 4, c'est moi qui marque un point. Qui a le plus de chances de gagner ?
Q12. Dans un jeu de société, tu dois faire un total de six pour commencer à jouer.
Tu peux lancer au choix un seul dé, ou deux dés. Que choisis-tu ? Et s'il fallait faire un total de cinq ?

Connaître les a priori des élèves : des questionnaires testés en classe

<u>Objectif :</u> connaitre les a priori qu'ont les élèves sur les probabilités dans des situations connues (lancer de dés, de pièce de monnaie, tirage de boules).
Nous avons fait passer le questionnaire dans toutes les classes de 5e (au total 89 élèves) et nous avons récolté les résultats qui se trouvent dans un fichier Excel.

Voici quelques exemples de réponses d'élèves.

Lancer de dés

Q1. En lançant un dé, qu'est-ce qui est le plus facile à obtenir : **un 2 ou un 6 ?**
Pourquoi ?
Ça dépend comment une personne lance un dé.

Q1. En lançant un dé, qu'est-ce qui est le plus facile à obtenir : **un 2 ou un 6 ?**
Pourquoi ?
ci on prend le dé du côté 2 sa ad tombé sur le 2 ou pareille pour le 6.

Q1. En lançant un dé, qu'est-ce qui est le plus facile à obtenir : **un 2 ou un 6 ?**
Pourquoi ?
2 car ces un petit chiffre

Q1. En lançant un dé, qu'est-ce qui est le plus facile à obtenir : **un 2 ou un 6 ?**
Pourquoi ? Aucun des 2 car c'est complètement aléatoire.

Q1. En lançant un dé, qu'est-ce qui est le plus facile à obtenir : **un 2 ou un 6 ?**
Pourquoi ? ~~Un~~ Aucun, je pense que les probalitées sont les mêmes.

Voici un retour d'expérience sur cette même question, dans une autre classe de 5ème.
Q1. En lançant un dé, qu'est-ce qui est le plus facile à obtenir : un 2 ou un 6 ?
Bilan des réponses :

– 13 élèves soit près de la moitié de la classe répondent « je ne sais pas » car « c'est le/du hasard », « ce n'est pas nous qui allons choisir », « ça dépend du lancer » ;

– 8 élèves (soit environ 29 %) répondent « le 2 car c'est un plus petit nombre », « la face du 2 est plus lourde que celle du 6 car il y a moins de petits trous », « le 2 est sur le côté du dé », « moi je n'arrive pas trop à avoir des 6 », « car la face du 2 est plus légère » ;

– 3 élèves (soit environ 11 %) répondent « le 6 car il y a plus de trous donc la face est plus légère », « je fais souvent des 6 » ;

– 3 élèves (soit environ 11 %) répondent aucun des deux car « il y a la même probabilité pour chacun », « il y autant de chance que ça tombe sur 2 que sur 6 », « c'est le hasard qui fait les choses » ;

– une élève fonde sa réponse sur la nature du dé : « s'il est vide (c'est le 2), s'il est rempli (c'est le 6) ».

Lorsque j'ai relevé le questionnaire, les élèves ont tout de suite réclamé les réponses et discuté ! La première question a suscité un tel débat dans la classe que nous n'avons pas eu le temps de traiter les autres questions. Quand je leur ai donné la réponse, beaucoup m'ont demandé si on pouvait le prouver ! Je leur ai montré une simulation de lancers d'un dé faite sur tableur sans plus entrer dans les détails.

Pile ou face

Q2. On lance quatre fois une pièce de 1 € et on note la suite des « pile » (P) ou « face » (F). **Quel est le plus probable, obtenir PPPP ou obtenir PFFP ?**
Je n'en sais rien il faudrait le refaire pour

Q2. On lance quatre fois une pièce de 1 € et on note la suite des « pile » (P) ou « face » (F). **Quel est le plus probable, obtenir PPPP ou obtenir PFFP ?** PFFP car ~~ce m~~ c'est rare de tomber plusieurs fois du même côté.

Q2. On lance quatre fois une pièce de 1 € et on note la suite des « pile » (P) ou « face » (F). **Quel est le plus probable, obtenir PPPP ou obtenir PFFP ?**
PFFP car c'est beaucoup plus dur d'avoir 4 fois P.

Q5. Jean a lancé une pièce de monnaie, et a obtenu 5 fois de suite FACE. Vous voulez la relancer ; **pouvez-vous prévoir si ce sera PILE ou FACE ? Pourquoi ?**
Ce sera FACE car ont faient Face - pile - face - pile - face - jusqu'à arrivera à 5.

Q5. Jean a lancé une pièce de monnaie, et a obtenu 5 fois de suite FACE. Vous voulez la relancer ; **pouvez-vous prévoir si ce sera PILE ou FACE ? Pourquoi ?** ~~Pile~~ Face. On fait 5 x 1 = 5 -> correspond à face

Q5. Jean a lancé une pièce de monnaie, et a obtenu 5 fois de suite FACE. Vous voulez la relancer ; **pouvez-vous prévoir si ce sera PILE ou FACE ? Pourquoi ?**
ça sera Pile car il a déja fait 5 fois de suite Face avec le streak il pourra pas faire un autre fait.

Q5. Jean a lancé une pièce de monnaie, et a obtenu 5 fois de suite FACE. Vous voulez la relancer ; **pouvez-vous prévoir si ce sera PILE ou FACE ? Pourquoi ?** On peut pas savoir car y a 1 chances sur 2

Q5. Jean a lancé une pièce de monnaie, et a obtenu 5 fois de suite FACE. Vous voulez la relancer ; **pouvez-vous prévoir si ce sera PILE ou FACE ? Pourquoi ?**

les personnes ne peut pas prévoir quelque chose à part si c'~~est~~ de la triché

Q5. Jean a lancé une pièce de monnaie, et a obtenu 5 fois de suite FACE. Vous voulez la relancer ; **pouvez-vous prévoir si ce sera PILE ou FACE ? Pourquoi ?**

Non. Car on ne connait pas le destin.

Q4. Dans une boîte il y a trois boules noires et six boules blanches. Dans une autre, il y a sept boules noires et quatorze boules blanches. On prend au hasard une boule dans l'une des boîtes. **Dans quelle boîte a-t-on le plus de chances d'avoir une boule noire ?**

DANS La 1er car il y a moin de boule Blanche.

Q4. Dans une boîte il y a trois boules noires et six boules blanches. Dans une autre, il y a sept boules noires et quatorze boules blanches. On prend au hasard une boule dans l'une des boîtes. **Dans quelle boîte a-t-on le plus de chances d'avoir une boule noire ?**

$6 \div 3 = 2$ on ne peut pas savoir car le quotient et le même pour
$14 \div 7 = 2$ les deux boites.

Q4. Dans une boîte il y a trois boules noires et six boules blanches. Dans une autre, il y a sept boules noires et quatorze boules blanches. On prend au hasard une boule dans l'une des boîtes. **Dans quelle boîte a-t-on le plus de chances d'avoir une boule noire ?** On a plus de chance de tomber sur une boule noir dans la boite qui contient 7 boules noirs car vue qu'il y en a plus on a plus de chance.

Q4. Dans une boîte il y a trois boules noires et six boules blanches. Dans une autre, il y a sept boules noires et quatorze boules blanches. On prend au hasard une boule dans l'une des boîtes. **Dans quelle boîte a-t-on le plus de chances d'avoir une boule noire ?**

Dans les deux car on ~~a~~ ~~autant~~ à le même pourcentage d'attraper les différentes boules.

Ce qui est intéressant à noter c'est que les élèves cherchent des arguments pour motiver leurs réponses. Même s'ils ne sont pas toujours justes et recevables, cela permet de débattre plus facilement.

Il s'est alors engagé une discussion au travers de ces questions et les élèves attendaient vraiment des réponses. On a donc échangé autour des termes « hasard », « aléatoire » et « équitable ». Un élève m'a dit « tous les jeux sont équitables Madame, enfin non pas le loto, ça c'est de l'arnaque ». Afin de lui prouver le contraire, je leur ai proposé de faire le « jeu des sommes et des produits » détaillé un peu plus loin.

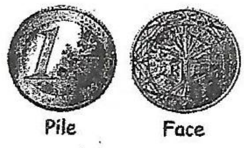
Une activité d'introduction analogue

Voici une variante à l'activité précédente, que j'ai testée cette année en 4ème , également en guise d'introduction aux probabilités.

Répondre aux questions suivantes en justifiant la réponse.

a. On lance neuf fois de suite une pièce de monnaie et l'on obtient :

P F F P F F P F F



où P désigne le côté pile et F le côté face de la pièce.
Si l'on relance une fois de plus cette pièce, que va-t-on obtenir ?

b. En lançant un dé, quel nombre obtient-on le plus facilement ?

c. On lance un dé cubique six fois de suite. Quel est le plus probable : obtenir 1 ; 2 ; 2 ; 3 ; 3 ; 1 ou six fois de suite la face numérotée 6 ?

d. Dans une urne, il y a trois boules rouges et quatre boules bleues. Dans une seconde urne, il y a neuf boules rouges et douze boules bleues. Dans quelle urne a-t-on le plus de chances de piocher une boule rouge ?

e. Pour pouvoir commencer à jouer au jeu des petits chevaux, il faut obtenir un total de six. A-t-on plus de chances de commencer en lançant un dé ou deux dés ?

Les représentations initiales des élèves sont interrogées et des débats sont suscités.
Les élèves ont été très intéressés par ce type d'activités et sont « rentrés » très facilement dans l'activité. En circulant, je constatais leur empressement à découvrir rapidement les questions et à y répondre, mais sans trop justifier. Je suis donc intervenue pour leur redonner la consigne de justifier le plus précisément possible les réponses données.

<u>Lien avec les domaines prépondérants du socle :</u>
Domaines 1 et 3 grâce aux débats menés et à l'utilisation orale de la langue française.
Domaine 4 grâce à la modélisation et au raisonnement mis en place pour justifier les réponses données.

<u>Durée de l'activité</u>: 30 minutes.

Voici quelques exemples de copies d'élèves.

Copie 1
(L'élève en question fait référence à la loi des grands nombres pour justifier ses réponses.)

a) Je pense que c'est P, mais F est plus probable. Face est tombé 6 fois. Mais il faudrait beaucoup plus essayer pour avoir des réponses précise.

b) Je ne sais pas… essayez 6000 fois et revenez avec les résultats. On aura une aproximation. Il me semble que c'est la théorie des grands nombres.

c) Normalement, le 6 a autant de chances de tomber que les autres. Mais, si on essaye, on finira par obtenir l'un des deux.

d) Je pense que c'est la première urne. Car il n'y a qu'une boule bleue de différence. Là encore, si on veut un pourcentage précis, il faut beaucoup essayer. J'ai vu ça dans un "C'est pas Sorcier" sur le marketing. Plus l'échantillon interrogé est grand, plus on va se rapprocher du nombre exacte.

e)

	avec 1 dé	avec 2 dés
Pour avoir 6	6	5+1 4+2 3+3
Pas 6	1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5.	5+2/3/4/ 5/6. 6+1/2/3/4/ 6 ; 4+1/3/4 ; 3+1/2/ 2+1/2 1+1

Je ne sais pas…

Copie 2

On ne peut pas savoir sans avoir
les données (listées dans ma réponse)

c) Il faudrais avoir les données
dont j'ai parlé dans le petit b pour
pour faire des calculs et obtenir la réponse.
Mais pour obtenir 6 foix le nombre 6 il faudrait
reprendre le dé dans la même position
de départ, avoir le même nombre de
tours, dans le même, six foix de
suite pour obtenir le nombre 6 ~~six~~ foix.
Il serais donc plus probable d'arriver
a avoir les nombres 1 ; 2 ; 2 ; 3 ; 3 ; 1.

d) Dans les 2 car 3x3 = 9
4x3 = 12
Il y a autant de chance dans l'une
que dans l'autre

e) Avec 2 dés car avec 1 dé ont
a 1 chance sur 6 alors qu'avec 2 dés
ont ont à 2 x 1 chance sur 6 puisque ce
n'est pas 1 dé à 12 face. On jete 2 dés
donc il ya un 6 sur chaque dés. Si on
les lance ensemble ils vont s'entrechoquer
et ne pas faire le même nombre de tours
à la même vitesse

Copie 3

a) Dans la logique, ça serai F mais il y a 50% de chance que ce soit P et 50% de chance que ce soit F

b) tous ont $\frac{1}{6}$ de chance d'apparaître dans un lancé de dés (16,667%)

c) La suite de 1-2-2-3-3-1 ne paraît plus probable car ~~ce~~ c'est des nombres différents (contrairement aux six 6)

d) aucune car ~~il y a~~ (3 rouges x 3 => 9 et 4 bleus x 3 => 12,
il y a autant de chance pour les deux

e) 2 dés car on a 2 x plus de chances

Copie 4

a. On va probablement obtenir le côté pile de la pièce c'est ce qui ce passait avant.

b.

c. On peux plus probablement obtenir : 1;2;2;3;3;1 car il a plusieurs numéros.

d. On a plus de chance de tomber sur une boule rouge dans l'urne n°1 car il y a moins d'écart entre les boules rouges et bleues

e. On a plus de chance de lancer deux dés car ~~il~~ il aura 2 fois plus de chance.

Copie 5

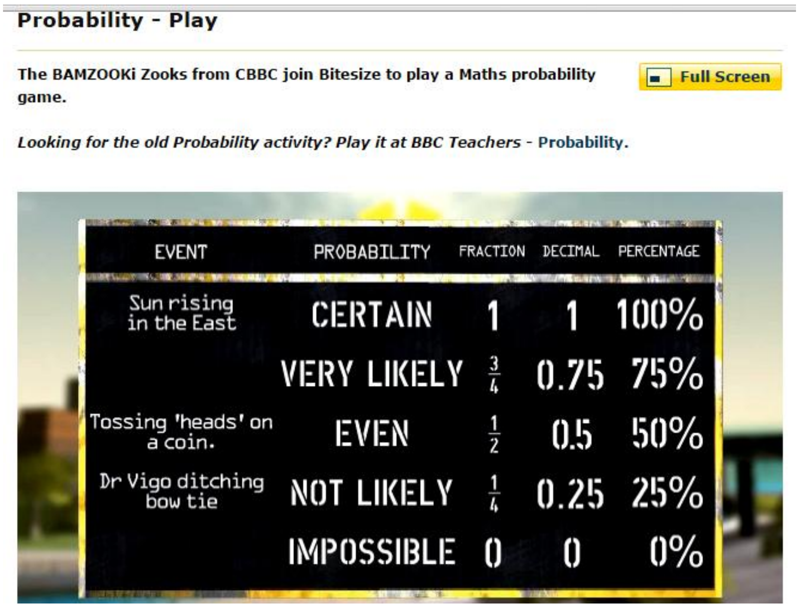
a) Logiquement on va obtenir le côté pile de la pièce
selon l'enchaînement ci - dessus
b) On obtient le nombre 3 en lançant un dé (le plus
souvent) car ce nombre est la moitié de 6

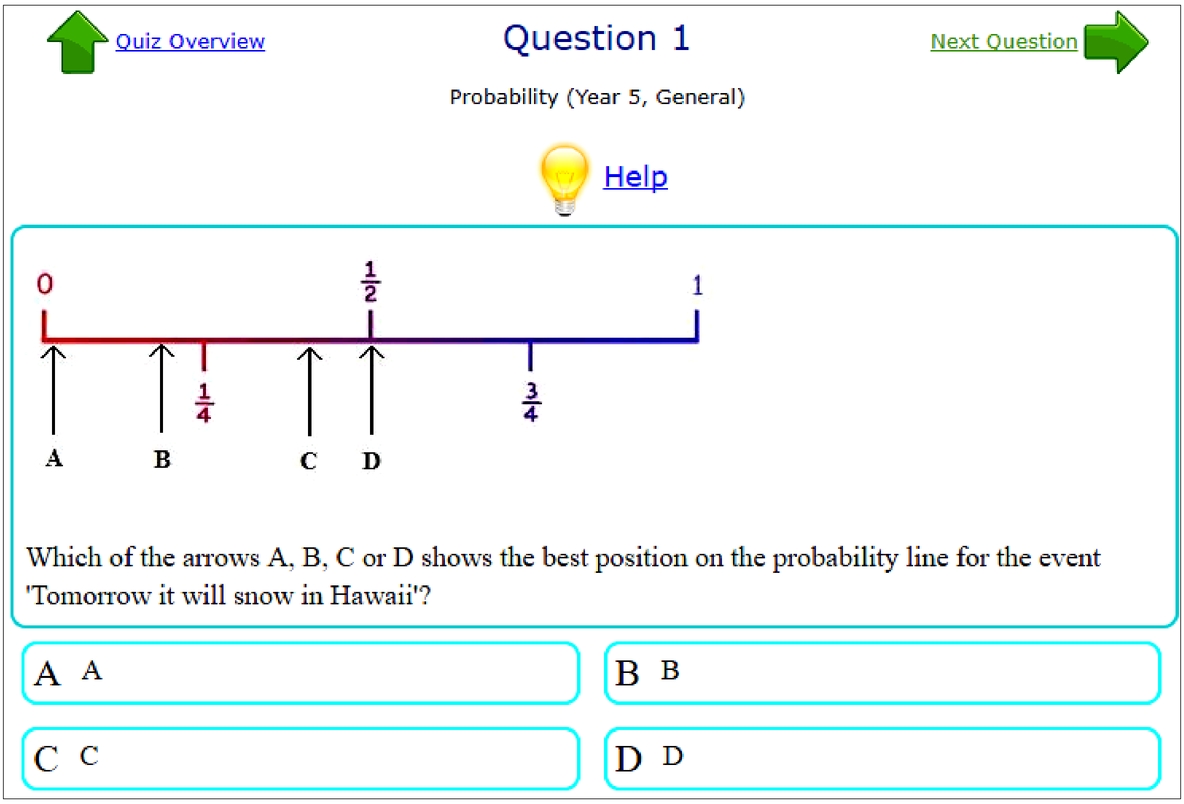
c) En lançant plusieurs fois le dé cela serait plus
probable d'obtenir 3 car cela parait bizzar que
le même nombre sorte 6 fois de suite
d) On aura plus de chance a piocher une boule
rouge dans l'urne n°1 car il y a moins de boules de

e) On aura plus de chance à lancer avec 2 dés car
le résultat pourra être plus élevé

Utiliser une échelle de probabilité : exemples inspirés de pratiques anglo-saxonnes

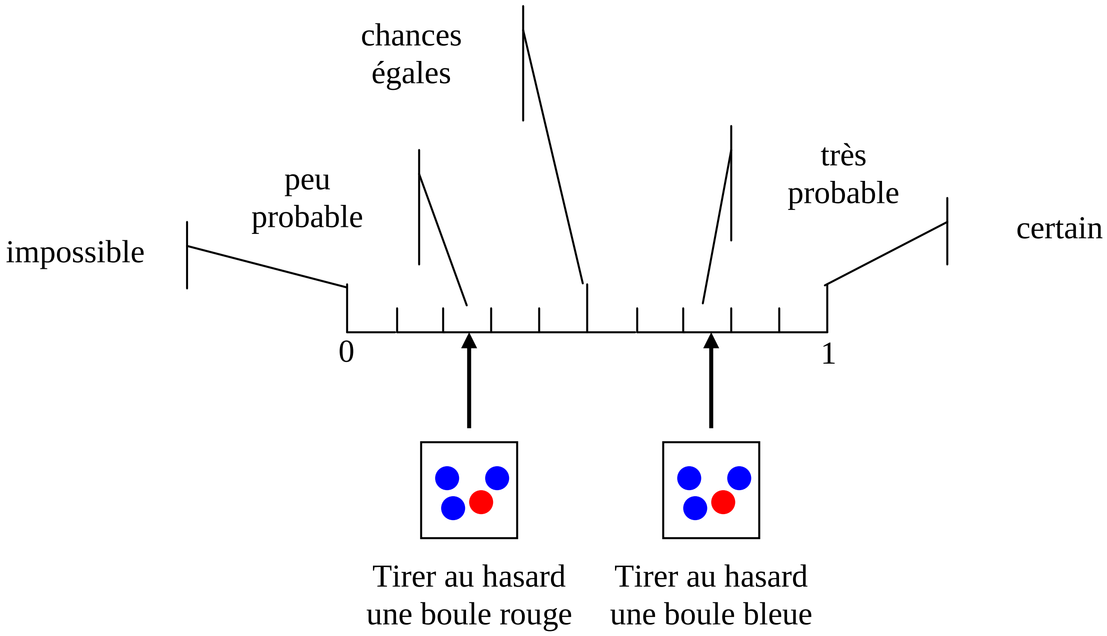
La familiarisation à la mesure d'une probabilité par utilisation d'une « échelle de probabilités » est particulièrement développée au Royaume-Uni ou aux Etats-Unis comme l'illustre l'image suivante d'un jeu de probabilités utilisant ce type d'échelle sur le site scolaire de la BBC ou d'un quiz sur un site américain http://www.mathopolis.com.



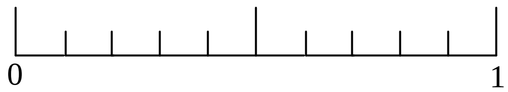


Énoncé

On peut indiquer la probabilité d'un événement sur une échelle de probabilité comme ci-dessous, depuis 0, événement impossible, jusqu'à 1, événement certain.

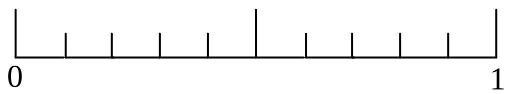


1. Placer une flèche sur l'échelle de probabilité pour indiquer la probabilité des événements suivants.



a) Vous lancez une pièce d'un euro et obtenez « face ».
b) Noël sera cette année le 25 décembre.
c) Il va pleuvoir durant la première semaine de décembre.
d) Un homme a trois têtes.
e) Vous jouez au loto et gagnez le gros lot.
f) Vous lancez un dé et obtenez un nombre pair.
g) Il va pleuvoir demain.
h) L'équipe de France va remporter son prochain match international de football.
i) Un élève de votre classe a son anniversaire demain.

2. Un sac contient trois balles blanches et deux balles grises. Placer une flèche sur l'échelle de probabilités suivante pour indiquer :
a) la probabilité d'extraire au hasard une balle blanche du sac ;
b) la probabilité d'extraire au hasard une balle grise du sac.



Travailler sur le vocabulaire des probabilités – Échelle de probabilité

Les élèves ont globalement un vocabulaire pauvre en probabilités. Quand je leur ai demandé les différentes situations qui pouvaient se produire, ils m’ont répondu :

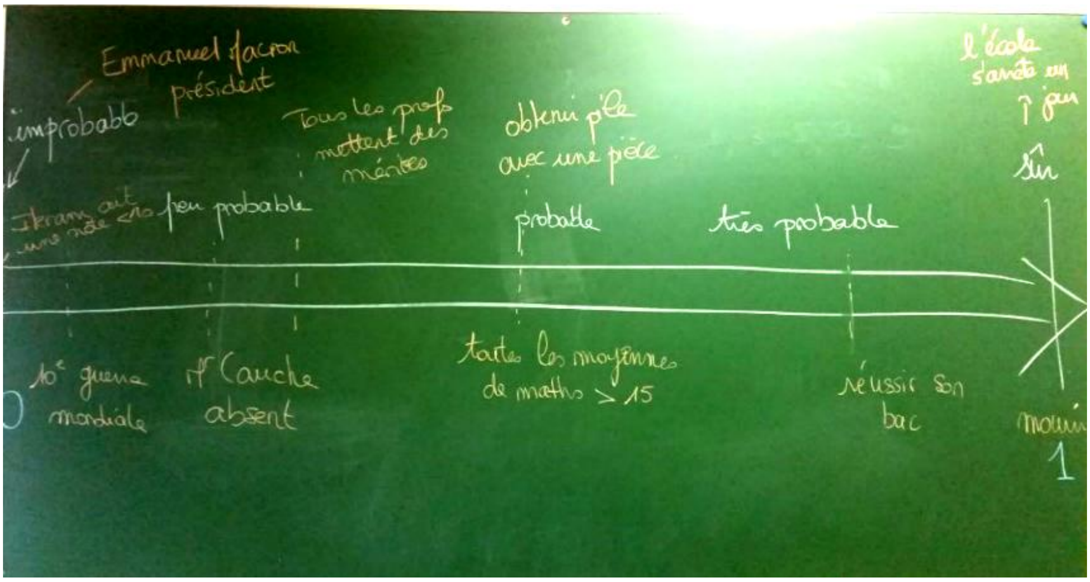
– ça peut se produire ;
– ça ne peut pas se produire.

J’ai alors voulu introduire avec eux les termes de « probable », « peu probable », « très probable », « impossible » et « sûr ». On a tout d’abord essayé de classer ces termes et ils les ont rangés dans l’ordre « croissant » :

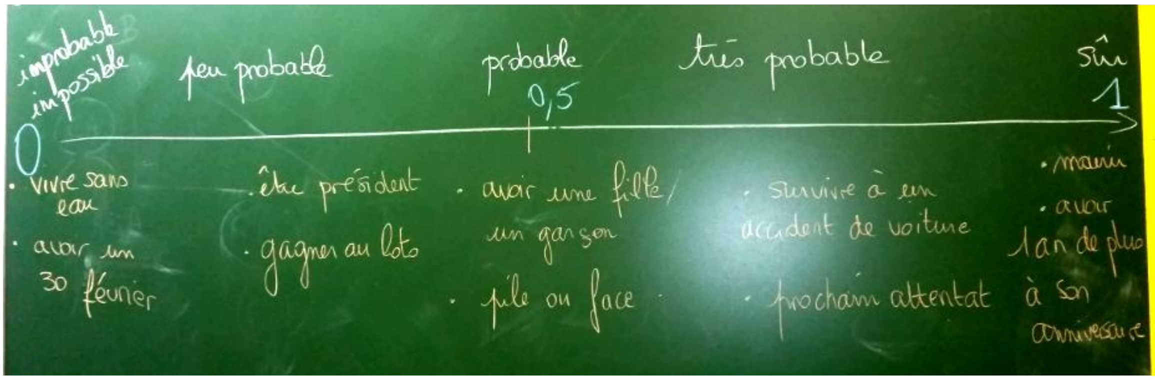
impossible < peu probable < probable < très probable < sûr.

Ayant déjà fait le chapitre sur la comparaison des nombres relatifs, je leur ai demandé s’ils ne voyaient pas d’autres méthodes pour comparer des choses et ils m’ont proposé la droite graduée.

Nous l’avons un peu modifié pour obtenir l’échelle de probabilités suivante :



Pour une autre classe :



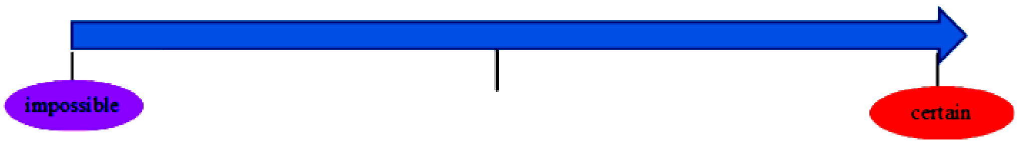
Pour quantifier les probabilités, il a été facile de trouver 0 pour un événement impossible. Par contre, pour trouver le 1, j’ai eu droit à :

– 100 % ;
– 6 chances sur 6 (en référence au dé) ;
– 36 sur 36 (jeu des produits et des sommes)…

Finalement, nous sommes tous tombés d'accord que tous ces nombres représentaient la même chose.

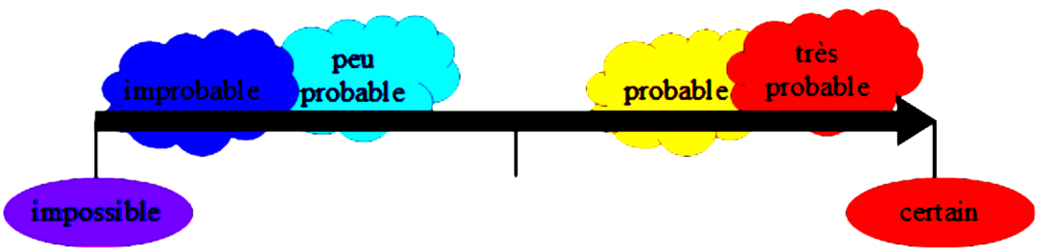
Autre introduction de l'échelle de probabilité

Lors d'une séance suivante, j'ai donné deux événements (l'un certain, l'autre impossible). Les élèves ont tout de suite traduit ces événements sur leur possible réalisation ou non : « c'est impossible », « c'est sûr à 100 % ».
Je leur ai alors montré la 1ère échelle de probabilités avec le vocabulaire « impossible » et « certain ».

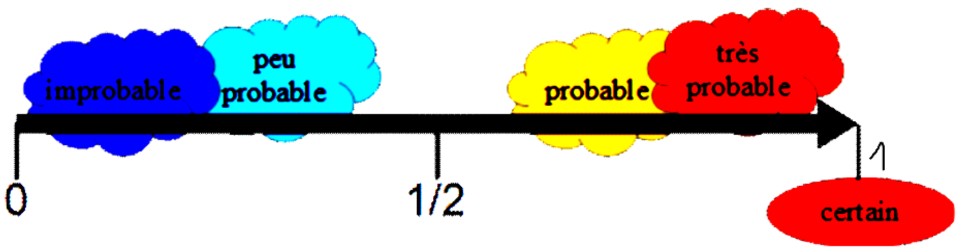


En reprenant l'activité « jeu équitable » (voir plus loin), je leur ai demandé « où placeriez-vous gagner au jeu B si je choisis les nombres impairs ? » puis la même question avec le jeu A.
Puis un élève a proposé un événement, que nous avons placé collégialement sur l'échelle des probabilités.
A l'oral, les élèves utilisent les mots : « certain », « souvent », « rarement », « quelques fois ».
Pour d'autres séances, le travail s'est déroulé au moment du « rituel », sous forme de questions flash, en faisant évoluer l'échelle des probabilités projetée.

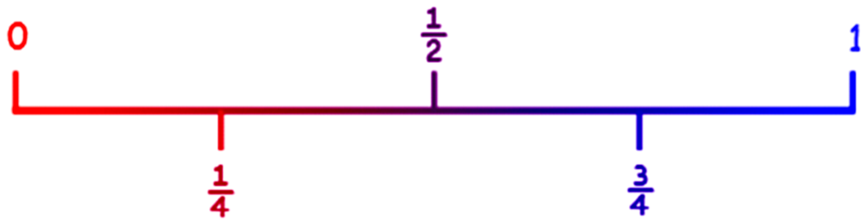
Échelle avec les termes « probable » et ses dérivés :



Échelle avec une probabilité :



Puis :



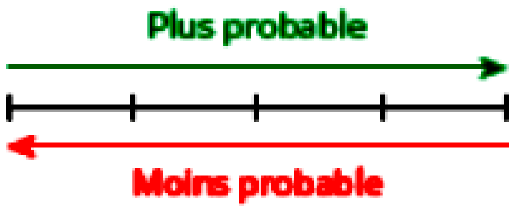
Un dernier exemple d'activité introduisant une échelle de probabilité

« La perception naturelle du hasard peut être qualifiée dans un premier temps par des adjectifs (peu probable, probable, certain, …). Ces débats et activités sont l'occasion, petit à petit, d'ordonner les probabilités, de quantifier le hasard sur une échelle de 0 à 1… ». (Document d'accompagnement des programmes de cycle 4)

Cette activité a pour objectifs de reconnaître des situations relevant d'une expérience aléatoire, d'ordonner le hasard, d'émettre des conjectures et de modéliser le hasard… sans en calculer la probabilité.
Lien avec les domaines du socle : domaines 1, 2, 3 et 4.
Activité menée en 4e. (Les élèves n'ont pas fait de probabilités l'année précédente.)
Durée : environ 20 minutes.

ENONCE DE L'ACTIVITE

On a construit une échelle de probabilité pour positionner des événements, du moins probable au plus probable :



Placer les événements ci-dessous sur cette échelle :

A : « La fête des mères a lieu un dimanche »
B : « Cette année, le nouvel an aura lieu un 2 février ».
C : « Un oiseau est entré dans la salle de classe ».
D : « Un de mes camarades de classe est né le 31 avril ».
E : « Obtenir Pile lors d'un lancer d'une pièce de monnaie ».
F : « Aucun téléphone portable ne va sonner dans la salle de classe dans la minute qui suit ».
G : « L'équipe de France de football va gagner le prochain match contre l'équipe d'Espagne ».

L'utilisation d'une échelle des probabilité est très naturelle pour les élèves qui se l'approprient aisément. Dans cette activité, les erreurs commises étaient dues à des erreurs de « pensée ». En effet, beaucoup étaient persuadés que la fête des mères avaient lieu à une date fixée et n'avait par conséquent pas toujours lieu un dimanche ; d'autres avaient oublié que le 31 avril n'existe pas… quant à l'événement G… de nombreux débats ont eu lieu…

(cette probabilité, subjective, peut être différente selon le degré d'information que l'on possède).
Après avoir fait cette activité, j'ai demandé aux élèves de me qualifier les différents événements donnés dans cette activité. Les qualifiants suivants : « impossible », « sûr et certain », « peu probable » / « peu de chances », et « autant de chances » sont ressortis.
Je leur ai ensuite donné le QCM suivant pour quantifier les différents types d'événements sur l'échelle de 0 à 1.

(1) Un événement dont la probabilité est égale à 100 % est un événement :

a. impossible **b.** peu probable **c.** très probable **d.** certain

(2) Un événement dont la probabilité est égale à 0 % est un événement :

a. impossible **b.** peu probable **c.** très probable **d.** certain

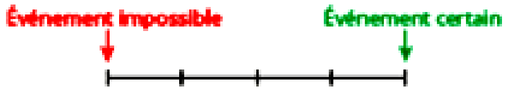
(3) Un événement qui a autant de chances de se réaliser ou non a une probabilité de :

a. 50 % **b.** 100 % **c.** 0 %

(4) Un événement qui se produit de façon peu probable a une probabilité comprise entre :

a. 0 et 0,5 **b.** 0,5 et 1

4. Compléter les graduations de l'échelle des probabilités ci-dessous à l'aide d'un pourcentage, d'un nombre décimal ou d'une fraction.



(activité issue du manuel *Delta Mathématiques* cycle 4 éditions BELIN.)

Exemples de questions flash

(Voir le diaporama « questions_flash_probas_5e.pptx ».)

Situer lorsque c'est possible la probabilité des événements suivant sur l'échelle de probabilité :

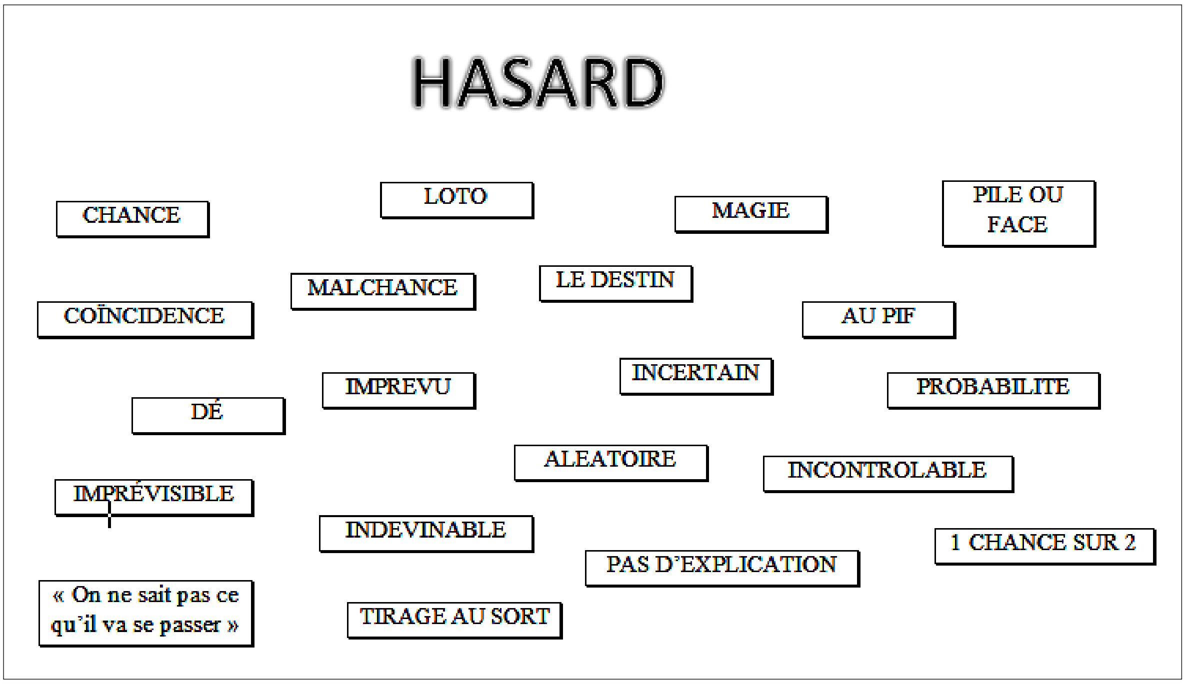
1) Le début de l'année 2016 sera le 1er janvier.
2) Gagner le gros lot au loto.
3) Avoir de la pluie demain.
4) Avoir de la pluie le dernier jour du mois prochain.
5) L'équipe de France va remporter le prochain match international de football.
6) Un élève de la classe a son anniversaire demain.
7) Rencontrer un tyrannosaure vivant.
8) The sun will rise tomorrow.
9) Avoir une bonne note au contrôle de maths.
10) Obtenir face quand on lance une pièce d'un euro.
11) If I flip a coin it will land heads up (face).
12) Choosing a red ball from a sack with 1 red ball and 3 green balls.

Questionnaire à choix multiples

1. Quelque chose qui se produit de façon peu probable a une probabilité entre :
   - ☐ 0 et 0,5
   - ☐ 0,5 et 1
   - ☐ 1 et 2
2. Quelque chose qui se produit de façon probable a une probabilité entre
   - ☐ 0 et 0,5
   - ☐ 0,5 et 1
   - ☐ 1 et 2
3. Quelle est la probabilité d'obtenir 4 avec un dé supposé équilibré ?
   - ☐ un sixième
   - ☐ un
   - ☐ zéro
4. Quelle est la probabilité d'obtenir « face » avec une pièce supposée équilibrée ?
   - ☐ 1
   - ☐ 0,5
   - ☐ 0,2
5. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair avec un dé supposé équilibré ?
   - ☐ un sixième
   - ☐ un tiers
   - ☐ un demi
6. Une pièce supposée équilibrée est lancée trois fois. Elle tombe deux fois sur « face » et une fois sur « pile ». Quelle est la probabilité que la pièce tombe sur pile au prochain lancer ?
   - ☐ 1
   - ☐ un demi
   - ☐ 0
7. Un sac contient sept boutons. Trois d'entre eux sont verts. Quelle est la probabilité d'extraire au hasard un bouton vert du sac ?
   - ☐ un septième
   - ☐ deux septièmes
   - ☐ trois septièmes
8. Quelque chose qui a autant de chances d'arriver ou de ne pas arriver a une probabilité de
   - ☐ 100 %
   - ☐ 50 %
   - ☐ 0 %
9. Un sac contient seulement 5 boutons, qui sont tous bleus. Quelle est la probabilité d'extraire au hasard un bouton rouge du sac ?
   - ☐ 0
   - ☐ 0,5
   - ☐ 1
10. Un sac contient quatre boutons blancs. Combien de boutons noirs faut-il ajouter pour avoir autant de chances de tirer au hasard un bouton noir ou un bouton blanc du sac ?
    - ☐ 4
    - ☐ 8
    - ☐ 0

Une activité autour du mot « hasard »

Face à l'apparition récurrente sur les questionnaires et lors des discussions en classe du mot « hasard » (« Madame, c'est le hasard ! ça ne sert à rien d'en parler »), j'ai demandé aux élèves d'écrire sur une feuille un mot qu'ils associaient au mot « hasard ». J'ai ramassé les feuilles.
La séance suivante, j'avais préparé un tableau récapitulatif de leurs réponses.
Un exemple de tableau dans une classe :



Nous avons discuté autour de ces mots, de leurs significations pour certains puis autour de deux questions : les garde-t-on ? les barre-t-on ?
Le débat a été très fructueux, une grande majorité des élèves s'est impliquée. Des élèves tentaient d'en convaincre d'autres, le moment était très vivant.
Bien que peu de mots autour des jeux aient été proposés dans un 1^er^ temps, le débat a eu lieu souvent sur le registre des jeux et des jeux de « hasard », des élèves s'appuyant sur leur expérience de joueur (aux « petits chevaux », aux « quems ») pour débattre. Des élèves en désaccord ont sorti une pièce de monnaie en me demandant s'ils pouvaient essayer !
Le débat s'est aussi orienté sur la « mémoire » du hasard. Une pièce de monnaie peut-elle tomber 3 fois, 5 fois sur la même face ?
A la fin de ce temps, j'ai demandé à chaque îlot de proposer une définition du mot « hasard » par écrit puis de la lire à la classe. En voici quelques-unes :
« C'est quand on ne peut pas prévoir », « on ne peut pas programmer », « ça ne vient pas de sa propre volonté », « on ne peut pas deviner à l'avance ».

Pour ce travail je me suis inspirée de l'activité « *Autour du mot hasard* » proposée par Georges PONS dans la brochure n°198 de l'APMEP : « *Probabilités au collège : ne pas laisser l'enseignement des probabilités au hasard…* ».

Jeu équitable ou non ? Le jeu des produits et des sommes

Dans cette activité, les élèves explorent deux jeux pour deux joueurs. Ils débattent du fait que le jeu est ou non équitable. Le premier jeu n'est pas équitable et cela doit apparaître en jouant. Le second jeu est équitable, ce qui est plus difficile à observer et leur avis peut être partagé.
À un premier niveau, il n'est pas attendu des élèves de calculer des probabilités, mais de développer une intuition des chances et de leur probabilité de gagner.

Jeu 1
À chaque partie, on lance deux dés et on multiplie les chiffres obtenus. Le joueur 1 gagne si le produit est impair. Le joueur 2 gagne si le produit est pair.
Le binôme joue un grand nombre de parties en prenant note du nombre de victoires de chaque joueur. Une discussion s'engage ensuite pour savoir si le jeu est équitable ou quel joueur, sinon, est avantagé.

Jeu 2
À chaque partie, on lance deux dés et on additionne les chiffres obtenus. Le joueur 1 gagne si la somme est impaire. Le joueur 2 gagne si la somme est paire.
Le binôme joue un grand nombre de parties en prenant note du nombre de victoires de chaque joueur. Une discussion s'engage ensuite pour savoir si le jeu est équitable ou quel joueur, sinon, est avantagé.

On peut mettre en commun les données de la classe, notamment à propos du jeu 2. On peut ensuite, selon le niveau d'apprentissage, raisonner sur les tables de multiplication et d'addition pour calculer les probabilités.

produit	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

somme	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

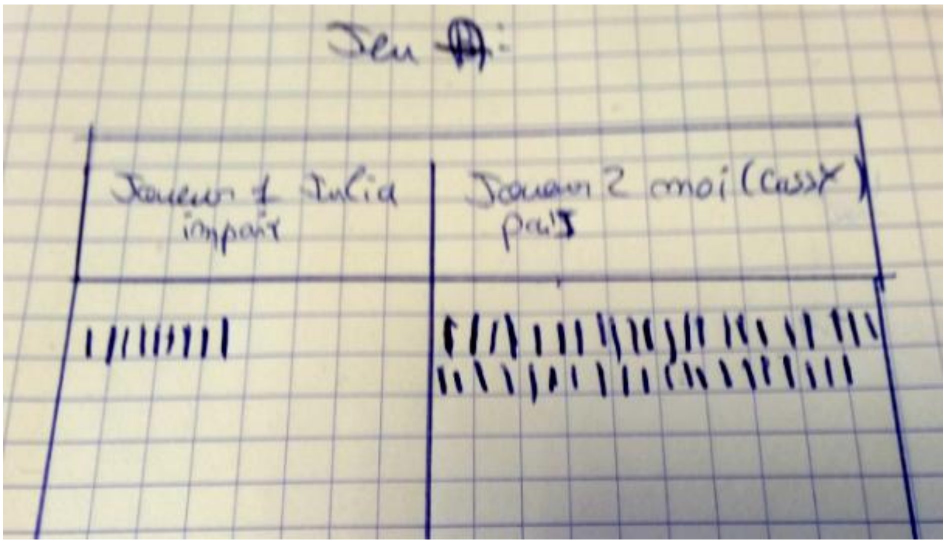
À l'issue du questionnaire d'introduction à la notion de probabilité, nous avons testé le « jeu des produits et des sommes » dans nos classes de 5e ou de 4e.

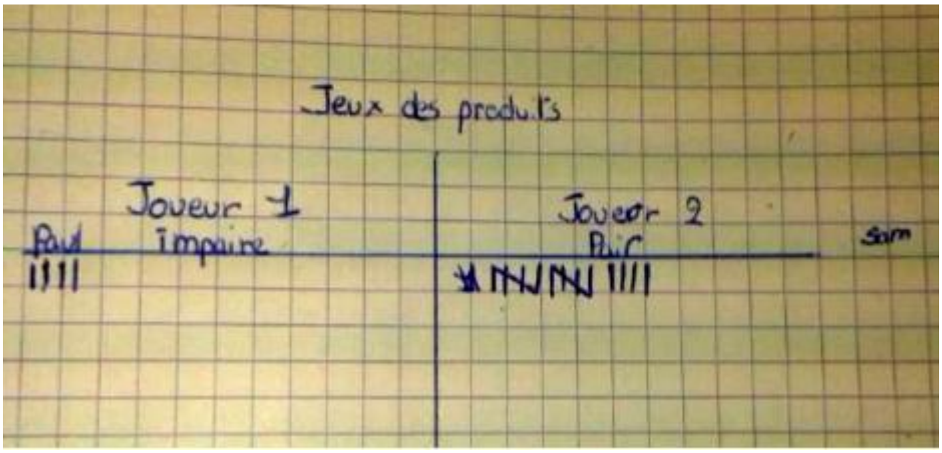
Enoncé de l'activité proposée aux élèves :

> Hasard, vous avez dit hasard ?
> On considère deux jeux de hasard et on se demande s'ils sont équitables ou non.
> <u>Jeu A :</u> « jeu des produits »
> À chaque partie, on lance deux dés et on multiplie les nombres obtenus. Le joueur 1 gagne si le produit est impair. Le joueur 2 gagne si le produit est pair. On te propose de jouer au « jeu des produits ». Choisis-tu d'être le joueur 1 ou bien le joueur 2 ?
> <u>Jeu B :</u> « jeu des sommes ».
> À chaque partie, on lance deux dés et on additionne les nombres obtenus. Le joueur 1 gagne si la somme est impaire. Le joueur 2 gagne si la somme est paire. On te propose de jouer au « jeu des sommes ». Choisis-tu d'être le joueur 1 ou bien le joueur 2 ?

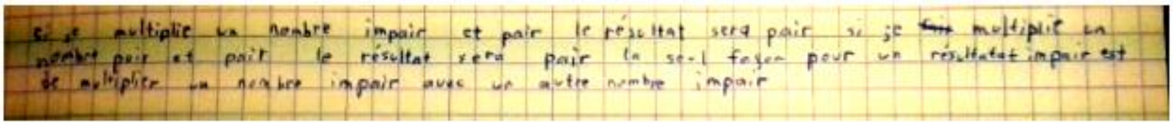
Avant de jouer, j'ai demandé aux élèves ce qu'ils en pensaient et ils m'ont répondu à l'unanimité « c'est pareil Madame, on peut choisir le joueur 1 ou le joueur 2 ! ». Je maintenais que non (sans leur donner d'explication) mais ils ne semblaient pas convaincus. Ils se sont alors mis par binômes et ont commencé à jouer. Ils ont effectué des lancers pendant une dizaine de minutes. Voici quelques exemples de cahiers d'élèves.

Jeu des produits



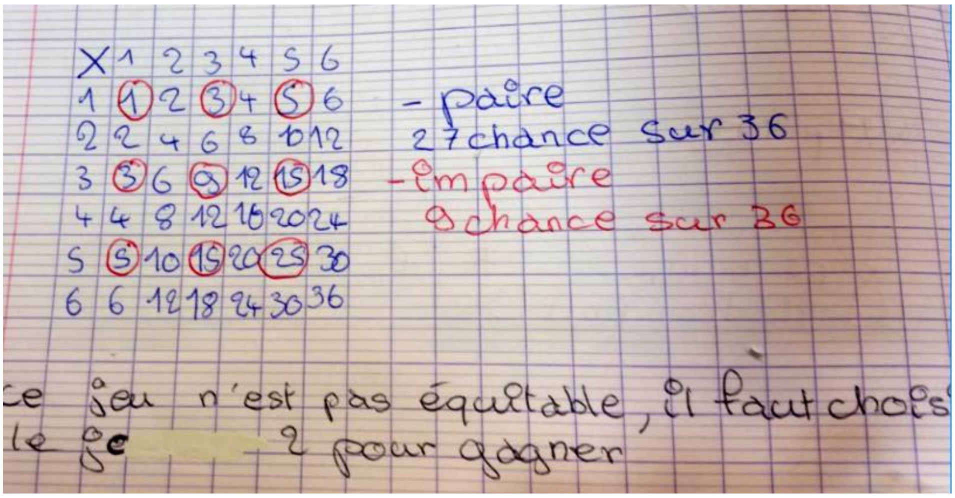


Puis un élève s'est énervé en s'exclamant « c'est de la carotte votre jeu Madame, je gagne jamais ! » (jeu des produits, joueur 1). Les élèves jouant au jeu des produits ont confirmé que c'était vrai : « les joueurs 1 ne gagnent jamais ». Ils ont alors émis l'hypothèse que le jeu n'était pas « juste » ; ce sur quoi l'un d'entre eux a ajouté que c'était normal et a expliqué son raisonnement aux autres :



« Si je multiplie un nombre impair et pair le résultat sera pair, si je multiplie un nombre pair et pair le résultat sera pair. La seule façon pour un résultat impair est de multiplier un nombre impair avec un nombre impair. »

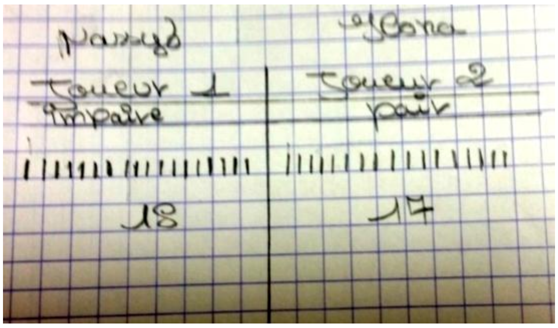
On a fini de convaincre tout le monde en élaborant un tableau.

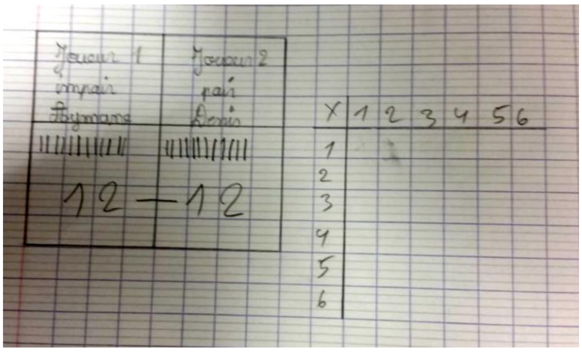


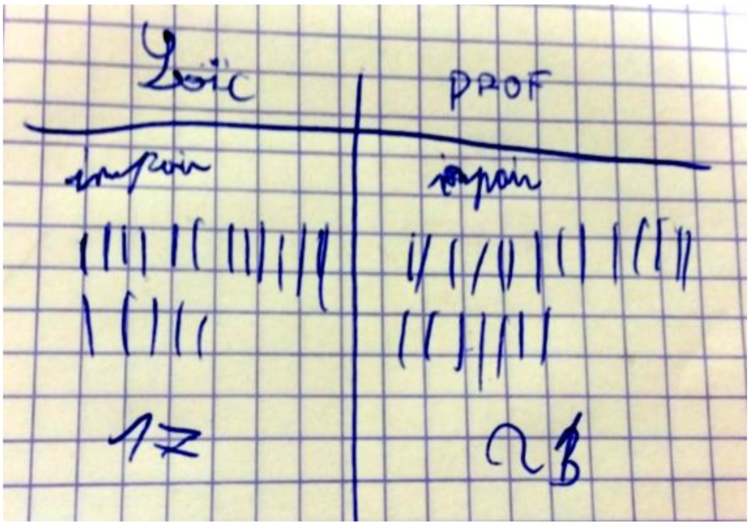
X	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

Jeu des sommes

La discussion a été plus rapide pour le jeu des sommes étant donné qu'il y avait des joueurs 1 et des joueurs 2 qui avaient gagné. Puis après avoir fait le tableau des sommes, il a été assez facile de conclure que le jeu des sommes était équitable.







Retour d'expérience dans une autre classe de cinquième de 28 élèves, hétérogène

Une fois l'énoncé lu en classe et le mot « équitable » expliqué par des élèves, les élèves ont travaillé par binôme sur cette activité. Ils avaient 30 minutes pour répondre aux deux questions, en justifiant leurs réponses, sur une feuille qui serait ramassée (mais non notée). Deux groupes ont fini au bout de quelques minutes, voici ce qu'ils ont rédigé :

Pour moi sa n'a aucune importance car on ne peut pas savoir c'est que du Hasard.

J'ai incité les élèves de ce binôme à utiliser les dés (qu'il fallait ramener pour cette séance et comme avait fait la plupart de leurs camarades) pour en être bien sûr.
Un autre binôme n'a pas utilisé les dés, mais a tout de suite pensé à établir les possibilités des résultats dans le cas du produit et de la somme des deux nombres et à comparer le nombre de résultats pairs et le nombre de résultats impairs.

1) Toutes les multiplications possiblent sont :

1×1 = 1
1×2 = 2
1×3 = 3
1×4 = 4
1×5 = 5
1×6 = 6

2×1 = 2
2×2 = 4
2×3 = 6
2×4 = 8
2×5 = 10
2×6 = 12

3×1 = 3
3×2 = 6
3×3 = 9
3×4 = 12
3×5 = 15
3×6 = 18

4×1 = 4
4×2 = 8
4×3 = 12
4×4 = 16
4×5 = 20
4×6 = 24

5×1 = 5
5×2 = 10
5×3 = 15
5×4 = 20
5×5 = 25
5×6 = 30

6×1 = 6
6×2 = 12
6×3 = 18
6×4 = 24
6×5 = 30
6×6 = 36

= nombre pair

Il y a beaucoup plus de résultat pair donc pour ce jeux il faut être le joueur 2.

2) Pour obtenir un nombre on peut soit additioné deux nombre pair ou 2 nombres impaires. Voici les possibilitées :

2+2=4 6+6=12 1+1=2
2+4=6 4+6=10 1+3=4 → Il y a donc 9 possibilitées
2+6=12 4+4=8 1+5=6

- Pour obtenir un nombre impair il faut additionner un nombre pair et un impair. Voici les possibilitées :

1+2=3 2+3=5 3+4=7
1+4=5 2+5=7 4+5=9 → Il y a donc 9 possibilites
1+6=7 3+6=9 5+6=11

Il y a autant de possibilitées pour chaque joueur donc je choisirais un joueur au hazard.

Les autres binômes ont utilisé les dés avec un vrai plaisir ! Les échanges étaient parfois vifs, certains mécontents de ne pas assez gagner.

Voici quelques extraits de copies pour le jeu des produits (jeu A) :

A: jeu des produits : joueur 1 | joueur 2
0 0 0 1 0 0 1 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 1 0 | 1 1 1 0 1 1 0 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1
4 | 16

c'est les paires qui sont toujours gagant avec les totaux

Une autre copie :

1	18	(6et3)	P	13	4x3=12 P
2	12	(6et2)	P	14	2x5=10 P
3	2	(2et1)	P	15	2x3 6 P
4	15	(3et5)	I	16	6x1=6 P
5	30	(6x5)	P	17	3x3=9 I
6	10	(5et2)	P	18	1x2=2 P
7	20	(4x5)	P	19	4x1=4 P
8	6	(2x3)	P	20	4x5=20 P
9	5	(5x1)	I	21	6x3=18 P
10	30	(5x6)	P	22	2x4=8 P
11	18	(6x3)	P	23	2x4=8 P
12	9	(3x3	I	24	5x2=10 P

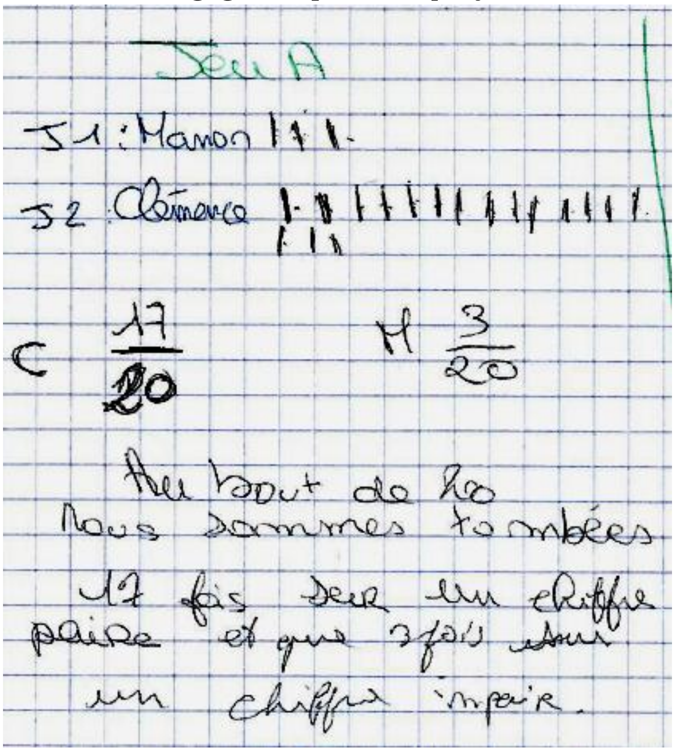
U: Je choisis d'être le joueur 1
E: Je choisis d'être le joueur 2.

Le joueur 1 a perdu. Le joueur 2 a gagné

On préfère être le joueur

Il y a plus de chance de tomber sur un nombre, le jeu est pas équitable au bout de 6 pair et au bout de 24 aussi (4 impair essais 20 pair).

Une autre copie dans laquelle les élèves ont exprimé leur chance de gagner par la fréquence des lancers gagnants pour chaque joueur :

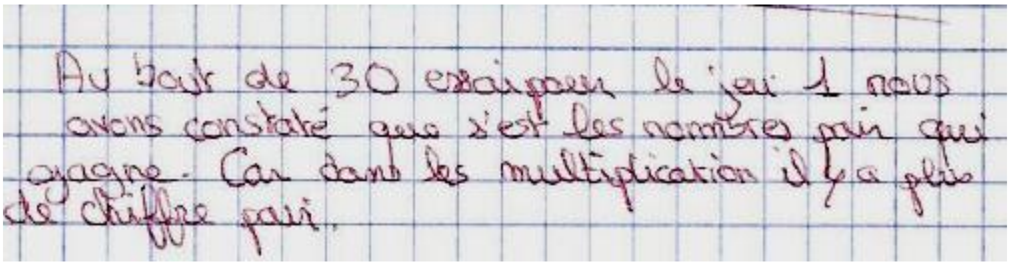

Jeu A

J1 : Manon | | | |

J2 Clémence | | | | | | | | | | | | | | | | |

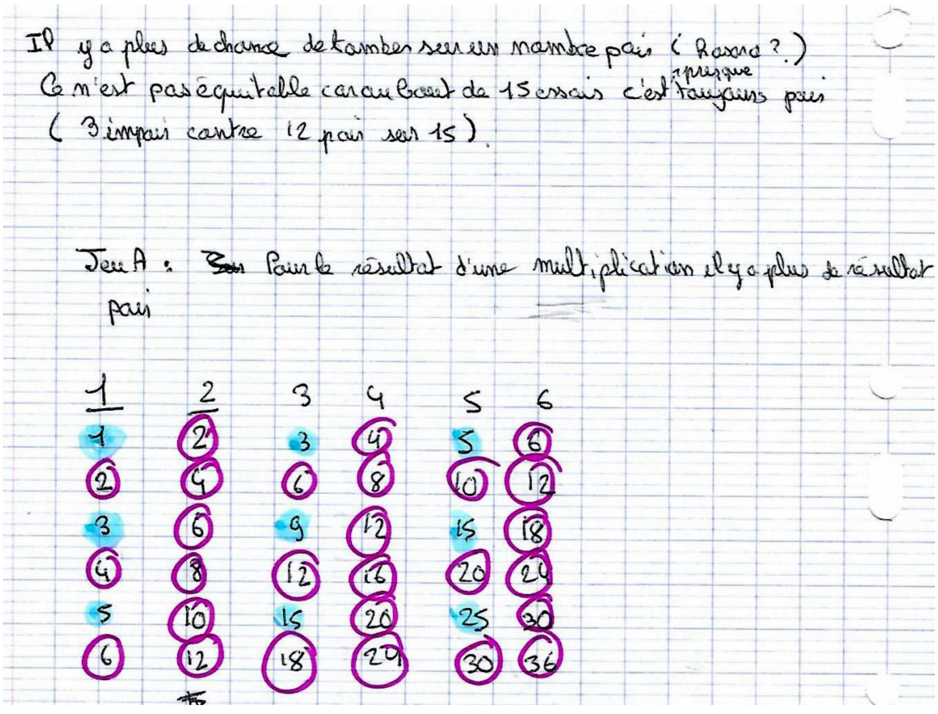
C $\frac{17}{20}$ M $\frac{3}{20}$

Au bout de 20 nous sommes tombées 17 fois sur un chiffre paire et que 3 fois sur un chiffre impair.


Au bout de 30 essai pour le jeu 1 nous avons constaté que c'est les nombres pair qui gagne. Car dans les multiplication il y a plus de chiffre pair.

La justification est succincte.

Des extraits des copies avec des justifications :


Il y a plus de chance de tomber sur un nombre pair (Hasard ?)
Ce n'est pas équitable car au bout de 15 essais c'est presque toujours pair
(3 impair contre 12 pair sur 15).

Jeu A : ~~Sur~~ Pour le résultat d'une multiplication il y a plus de résultat pair

1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6
2	4	6	8	10	12
3	6	9	12	15	18
4	8	12	16	20	24
5	10	15	20	25	30
6	12	18	24	30	36

Dans la table de 4, de 2 et de 6 il y a que des nombres
pair et dans la table de 1, 3 et 5 il y a autant de nombres
pair que de nombres impair (3 nombres impair et 3 pair)

Pair : 3, 3, 3 6 6 6 = 27 / 36

Impair : 3 3 3 0 0 0 = 9 / 36

Donc c'ést pas équitable il vaut mieux être
le joueur 2. Il y a plus de nombres pair.
C'est ~~pas~~ pas du hasard.
que
Je choisis d'être le joueur 2.

Ce binôme, après avoir expérimenté le jeu avec des dés, a fait un tableau de multiplications, a entouré de deux couleurs différentes les nombres pairs et impairs, les a comptés. Puis il a écrit une proportion des résultats pairs et des résultats impairs possibles.

Nous choissions d'être le joueur 2 car
souvent

impaire * pair = pair
(5) (2) 10

impaire x impaire = impair
(1) (3) (3)

paire x pair = pair
(6) (2) (12)

On peut remarquer le « souvent », les élèves l'ont constaté sur des exemples, mais ne sont pas sûrs que cela soit toujours vrai (cet extrait de copies a été l'occasion d'un travail plus tard dans l'année).

En fin de séance, un retour collectif a été fait à l'oral et une élève est venue présenter le tableau des multiplications de son binôme. L'ensemble des élèves a été convaincu que le jeu A des produits n'était pas équitable et qu'il était préférable d'être le joueur 2. Les remarques des élèves ont été : qu'il y avait tout de même du hasard et que l'on pouvait quand même gagner à ce jeu en choisissant les résultats impairs ; certains se sont demandés s'il y avait un nombre de fois à jouer pour être sûr de gagner.
Pour la séance suivante, les élèves avaient à faire le tableau de la somme de deux nombres (sur le même modèle que celui présenté en classe) et conclure sur le jeu B.
Les élèves ont beaucoup apprécié cette activité, ludique d'une part mais aussi parce qu'elle a fait évoluer leur façon de penser.

Jeu et stratégie : « Qui peut le plus ? »

L'activité suivante a été expérimentée par Christelle BLEIN et Isabelle PINET en classe de cm2 dans le cadre de leur mémoire professionnel (www.statistix.fr).

Énoncé

Le jeu « Qui peut le plus » se joue avec un dé, en binôme. Chaque élève du binôme dispose d'une grille comme ci-contre, qu'il remplit à chaque partie.
Pour chaque partie, l'un des deux élèves du binôme est le lanceur de dé. Il lance le dé pour remplir chacune des trois lignes du tableau. Au premier lancer, chaque élève inscrit le chiffre obtenu, au choix, à droite ou à gauche de la première ligne (sur l'exemple, on a obtenu 5 et l'élève 1 a choisi de l'inscrire sur la première ligne à gauche). Au second lancer, on complète la première ligne (on n'a plus le choix : ici le 3 est sorti). On complète de même les deux autres lignes, avec le choix de la position, à droite ou à gauche, aux troisième et cinquième lancers.
Chaque élève additionne ensuite les trois nombres à deux chiffres obtenu (pour l'élève 1, 53 + 44 + 12 = 109) et inscrit la réponse dans la dernière case.

élève 1	
5	3
1	2
4	4

109

élève 2	
5	3
2	1
4	4

118

Les élèves du binôme comparent leurs résultats. Celui qui a le plus grand résultat gagne 2 points, celui qui a le plus petit marque 0 point et en cas d'égalité, chacun marque un point.

1. Première mise en commun après quelques parties. Quel est le plus grand nombre obtenu ? Est-ce que tout le monde pouvait l'obtenir ? Quel est le plus grand nombre possible ? Est-ce que certaines faces apparaissent plus souvent que d'autres quand on lance les dés ?
2. Après quelques nouvelles parties, écrire des « règles » pour le placement du premier chiffre obtenu avec le dé.
3. Mise en commun des « règles » et discussion sur les « chances » de réussite des stratégies.
Exemple de « règles » observées :
– si le premier dé donne 6, j'écris 6 à gauche ;
– si le premier dé donne 5, j'écris 5 à gauche ;
…
– si le premier dé donne 1, j'écris 1 à droite.
4. Vous avez beaucoup joué aux dés. Avez-vous l'impression que certains chiffres reviennent plus souvent ? Comment faire pour le savoir ?
5. En supposant que les six chiffres du dés ont la même probabilité de sortie, quelle est la probabilité de réussite de la règle « si le premier dé donne 5, j'écris 5 à gauche » ?

Éléments de réponse

4. On peut exploiter les grilles de jeu pour comptabiliser la fréquence d'apparition de chaque face du dé pour la classe. On peut compléter l'observation par une simulation.

5. La règle « si le premier dé donne 5, j'écris 5 à gauche » comporte 5 cas favorables : 51 ; 52 ; 53 ; 54 ; 55 (que l'on convient de considérer comme « gagnant ») et un cas défavorable 56. Ces cas étant équiprobables, la probabilité de réussite de la règle est 5/6.

On raisonne de même pour les autres règles : certitude pour « le 6 à gauche » et « le 1 à droite », probabilité 5/6 pour « le 2 à droite » et probabilité 4/6 pour « le 4 à gauche » et « le 3 à droite ».

Niveau 2 d'apprentissage et exemples d'activités

– Comparer des graphiques de distributions (fréquentielle et théorique) en réalisant plusieurs fois une expérience aléatoire. Utiliser des simulations.
– Observer la fluctuation des fréquences pour un nombre de répétitions fixé de l'expérience aléatoire. Estimer une probabilité inconnue.
– Analyser des caractéristiques des événements complémentaires, des événements s'excluant mutuellement, des événements indépendants.
– Faire preuve d'esprit critique face à des affirmations concernant des phénomènes aléatoires, notamment extraites des médias.

Les « repères de progressivité » du programme de cycle 4 indiquent qu'à partir « de la 4^{e}, l'interprétation fréquentiste permet d'approcher une probabilité inconnue et de dépasser ainsi le modèle d'équiprobabilité mis en œuvre en 5^{e} ». Par « interprétation fréquentiste » de la notion de probabilité, il faut comprendre l'observation de la « stabilisation » des fréquences vers la probabilité de l'événement lorsque le nombre de répétitions de l'expérience aléatoire augmente. Un premier lien entre statistique et probabilités est réalisé dès la classe de cinquième lors des expérimentations menées en classe, qu'elles soient physiques ou simulées, par des relevés d'effectifs et de premiers calculs de fréquences (la notion de fréquence est en construction). À partir de la quatrième, il peut s'agir de comparer des graphiques de distributions de fréquences et de probabilités, d'observer la fluctuation des fréquences pour un nombre fixé n de répétitions de l'expérience aléatoire, de constater que ces fluctuations sont moindres pour de grandes valeurs de n. On peut réserver pour un « niveau 3 » la création de graphiques permettant d'observer la stabilisation des fréquences en fonction du nombre n de répétitions de l'expérience aléatoire, niveau attendu en fin de cycle 4, abordable dans certaines situations, ou par certains élèves, en fin de quatrième.

Contenus en probabilités du Common Core aux U.S.A.

À titre de comparaison, on peut considérer les contenus du *Common Core*, équivalent aux Etats-Unis de notre « socle », que l'on trouve à l'adresse suivante.
http://www.corestandards.org/Math/Content/SP/
Les probabilités sont introduites en 7th Grade, équivalent de notre classe de 5^{e}, avec une interprétation fréquentiste très aboutie. Au paragraphe « Étudier des expériences aléatoires et concevoir, utiliser et évaluer des modèles probabilistes » sont listées quatre « compétences » (ou capacités). La première est de « niveau 1 » : « Comprendre que la probabilité d'un événement est un nombre entre 0 et 1 exprimant les chances de réalisation de l'événement. Plus le nombre est grand, plus les chances sont importantes. Une probabilité proche de 0 indique un événement peu probable, une probabilité autour de ½ indique un événement également probable ou improbable, et une probabilité autour de 1 indique un événement très probable. ». La deuxième est de « niveau 2 » : « Approcher la probabilité d'un événement en recueillant des données à partir de l'expérience aléatoire qui le produit, en observant sa fréquence à long terme, et en estimant la probabilité correspondante. ». La troisième compétence va plus loin et concerne la modélisation : « Élaborer un modèle de probabilités et l'utiliser pour trouver des probabilités d'événements. Comparer les probabilités du modèle aux fréquences observées ; si la

différence est importante, expliquer les sources possibles de l'écart. […] Construire un modèle de probabilités (qui peut ne pas être celui de l'équiprobabilité) en observant les fréquences sur des données obtenues à partir de l'expérience aléatoire. ». Dans le cadre de la quatrième compétence concernant les probabilités d'événements « composés », on lit : « Concevoir et utiliser une simulation pour générer des fréquences pour des événements composés. Par exemple, utiliser des nombres aléatoires comme outil de simulation pour répondre approximativement à la question suivante : si 40 % des donneurs ont un sang du groupe A, quelle est la probabilité de devoir solliciter au moins 4 donneurs avant d'en trouver un de groupe A ? ».

Les familles de deux enfants

Énoncé

Des élèves doivent résoudre le problème de probabilités suivant.

On prend au hasard une famille parmi les familles françaises ayant deux enfants. Quelle est la probabilité que cette famille ait une fille et un garçon ?

N'ayant pas accès aux archives de l'état civil, les élèves supposent que la probabilité d'avoir une fille est égale à la probabilité d'avoir un garçon et raisonnent à partir de cette hypothèse.
Enzo propose la solution suivante : il y a trois cas possibles, la famille a deux filles, la famille a deux garçons ou la famille a une fille et un garçon. La probabilité cherchée est donc 1/3.
Jade n'est pas d'accord. Il faut, dit-elle, tenir compte de l'ordre des naissances. Il y a en fait quatre cas possibles : la famille a deux filles, la famille a deux garçons, la famille a eu une fille puis un garçon ou la famille a eu un garçon puis une fille. La probabilité cherchée est donc 2/4 c'est-à-dire 0,5.

1. À votre avis, qui a raison, Jade ou Enzo ?
2. Pour se faire une opinion, Tom propose une expérience aléatoire à l'aide de deux pièces de monnaie. Décrire une telle expérience aléatoire et la réaliser 10 fois. Que peut-on conclure ?
3. Voici le résultat de 50 expériences réalisées par Tom (F signifie « fille », G signifie « garçon » et, pour chaque expérience, les résultats sont inscrits l'un après l'autre).

FG **GG** FF **FF** GF **FF** GF **FF** GF **FF** FG **GF** FG **FF** FF **GF** GF **GG** GG **GG** GG **FF** FG **FG** FF
FF FG **GF** GG **GF** GF **FF** GG **GF** FG **GG** FG **FF** GG **FG** FF **FG** GF **FG** FF **GG** GG **FG** FF **GG**

En utilisant ces résultats, pouvez-vous préciser qui de Jade ou de Enzo semble avoir raison ?
Avec 50 autres expériences, est-ce que la réponse pourrait être différente ?
4. Exploiter une simulation sur tableur pour effectuer d'autres expériences.

Éléments de réponse
2. On lance les deux pièces en même temps. Face signifie « fille » et pile signifie « garçon », par exemple.
3. La fréquence des FG ou GF est 23/50 = 0,46. Jade semble avoir raison.
Avec 50 autres expériences, la réponse pourrait être différente. Il faudrait davantage d'expériences.
4. Les simulations de 50 expériences montrent des résultats fluctuant autour de 0,5.

G3 =NB.SI(D3:D52;"GG")

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Deux enfants**							
2	expérience	issue 1	issue 2	résultat			effectif	fréquence
3	1	F	F	FF		GG	11	0,22
4	2	G	G	GG		FF	15	0,3
5	3	F	F	FF		total	26	**0,52**
6	4	G	G	GG				
7	5	G	G	GG				
8	6	G	F	GF				

Jeu et stratégie : « Course de la somme de deux dés »

L'activité suivante illustre l'article de Heinz STEINBRING – *The theoretical nature of probability in the classroom* – 1991. On peut l'actualiser en introduisant la simulation.

Énoncé

Le jeu se joue à trois joueurs avec deux dés. Chaque joueur choisit l'un des nombres de 2 à 12 avec des choix différents. On lance les deux dés et on fait la somme des chiffres apparus. Si cette somme correspond à l'un des choix des joueurs, le joueur correspondant marque une croix dans sa colonne. Le premier joueur qui a réussi à compléter sa colonne avec des croix a gagné.

Arrivée										
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Départ										

1. Effectuer une partie et compléter, à chaque lancer le tableau suivant.

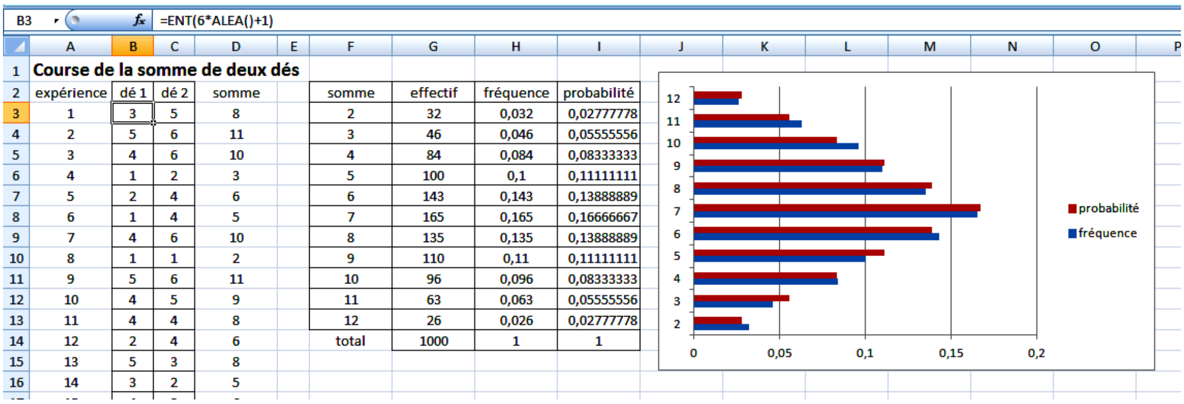
Somme des deux dés	Nombre de lancers avec cette somme
2	
3	
4	
56	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
Nombre total de lancers :	

2. Certains nombres permettent-ils de gagner plus sûrement que d'autres ? Expliquer.

3. Prolongement (cette question est proposée après la séance par exemple à la maison).
La table suivante comporte les différentes possibilités pour lesquelles chacune des sommes 2, 3, 4 apparaissent. Compléter la table.

2	1 + 1		
3	1 + 2	2 + 1	
4	1 + 3	2 + 2	3 + 1
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			

Éléments de réponse
La compréhension de la règle du jeu est aisée et cet exemple peut être le premier rencontré d'une distribution non équiprobable.
L'activité peut se dérouler durant une séance de classe : 5 à 10 minutes de présentation ; 20 minutes de travail en groupe et au moins 10 minutes de discussion en classe entière.
La durée d'une partie dépend des choix effectués et de leurs probabilités p de succès. Le temps d'attente d'un succès correspond à une loi géométrique de paramètre p dont l'espérance est $1/p$. Le temps moyen de 10 succès « somme égale à 7 » est donc de $10\times\frac{1}{\frac{6}{36}}$ = 60 lancers.
2. La discussion peut se faire sur la base des observations des fréquences de chaque somme.
La simulation, par exemple à l'aide d'un tableur, permet d'obtenir une distribution de fréquences sur un grand nombre de lancers.


B3 =ENT(6*ALEA()+1)

Course de la somme de deux dés

expérience	dé 1	dé 2	somme
1	3	5	8
2	5	6	11
3	4	6	10
4	1	2	3
5	2	4	6
6	1	4	5
7	4	6	10
8	1	1	2
9	5	6	11
10	4	5	9
11	4	4	8
12	2	4	6
13	5	3	8
14	3	2	5

somme	effectif	fréquence	probabilité
2	32	0,032	0,02777778
3	46	0,046	0,05555556
4	84	0,084	0,08333333
5	100	0,1	0,11111111
6	143	0,143	0,13888889
7	165	0,165	0,16666667
8	135	0,135	0,13888889
9	110	0,11	0,11111111
10	96	0,096	0,08333333
11	63	0,063	0,05555556
12	26	0,026	0,02777778
total	1000	1	1

3. La table fait apparaître la distribution théorique des probabilités (en divisant par 36) sous forme d'un diagramme en barres horizontal, que l'on pourra comparer avec l'analogue obtenu sur les fréquences observées sur les parties jouées en classe ou les simulations.

2	1 + 1					
3	1 + 2	2 + 1				
4	1 + 3	2 + 2	3 + 1			
5	1 + 4	2 + 3	3 + 3	4 + 1		
6	1 + 5	2 + 4	3 + 3	4 + 2	5 + 1	
7	1 + 6	2 + 5	3 + 4	4 + 3	5 + 2	6 + 1
8	2 + 6	3 + 5	4 + 4	5 + 3	6 + 2	
9	3 + 6	4 + 5	5 + 4	6 + 3		
10	4 + 6	5 + 6	6 + 4			
11	5 + 6	6 + 5				
12	6 + 6					

Probabilités et crues

Le travail suivant a été mené en 2016/2017 dans le cadre d'un E.P.I..

Situation de départ

> Le magazine *Le Point* du 13/09/2002 écrit :
> « Une crue de la Seine comparable à celle de 1910 se produit en moyenne tous les cent ans et la probabilité d'une telle catastrophe augmente d'année en année ».
> **Que pensez-vous des propos du journaliste ?**

Prérequis

Les élèves sont en 4^{e}, ils n'ont pas eu de cours sur les probabilités (année scolaire 2016/2017), connaissent juste le mot, mais les discussions sont riches de sens et donnent une bonne idée de leurs représentations.

Discussion entre élèves

« Il avait raison en 2002 puisque c'est arrivé en 2016 (le collège est à Moret-sur-Loing, ville touchée par la grande crue de juin 2016). »
« Il avait raison depuis 1910 on a déréglé le climat. »
« Il avait raison mais je ne sais pas pourquoi. »
« Moi je pense qu'il avait tort sinon pourquoi la prof nous demanderait d'en débattre ! Mais comment peut-il avoir tort puisque c'est arrivé ? »
Le professeur s'aperçoit que cela ne va pas être facile de convaincre et se demande si le « modèle » qu'elle va présenter aux élèves ne va pas être contesté puisqu'ils parlent du réchauffement climatique, paramètre non pris en compte dans la simulation.

Première activité

Les questions suivantes sont proposées à la classe.

1) Une crue de la Seine analogue à celle de 1910 est qualifiée de « centennale ». L'avant-dernière crue centennale de la Seine s'est produite en 1910, la dernière en 2016 (dans les villes du sud Seine-et-Marne en tout cas).

Sur cette photo de l'échelle de Moret-sur-Loing (qui se situe vers le pont), que remarquez vous ?

Réponses des élèves

« Ils ont inscrit la crue de 2016 ! »

« 32 ans / 108 ans / 106 ans ça ne fait pas tous les 100 ans. »

« 17 / 18 / 19 / 20 il y a une grande crue par siècle. »

2) Pensez-vous qu'en 2002, Paris :
□ avait **plus** de risque de subir la crue centennale qu'il y en avait en 1911 ;
□ avait **moins** de risque de subir la crue centennale qu'il y en avait en 1911 ;
□ n'avait **ni plus ni moins** de risque de subir la crue centennale qu'il y en avait en 1911 ;
□ qu'on ne peut pas dire.

Réponses des élèves
(Ils sentent le piège !)
Deux élèves pensent qu'il y avait plus de risques.
Aucun ne pense qu'il y en avait moins.
12 pensent qu'il n'y en avait ni plus ni moins.
13 pensent qu'on ne peut pas le dire.

3) Par définition, une crue « centennale » a, chaque année, une chance sur 100 de se produire.

a) Si on voulait simuler l'arrivée d'une crue centennale à l'aide d'une roue de loterie, comment devrait-on partager cette roue ?

Pas de soucis particuliers pour trouver la démarche à faire, il faut trouver l'angle du secteur circulaire qui représentera une crue, utiliser la proportionnalité (pendant l'EPI la proportionnalité a été beaucoup travaillée).
Peu font un tableau, beaucoup prennent 1/100 de 360 degrés.

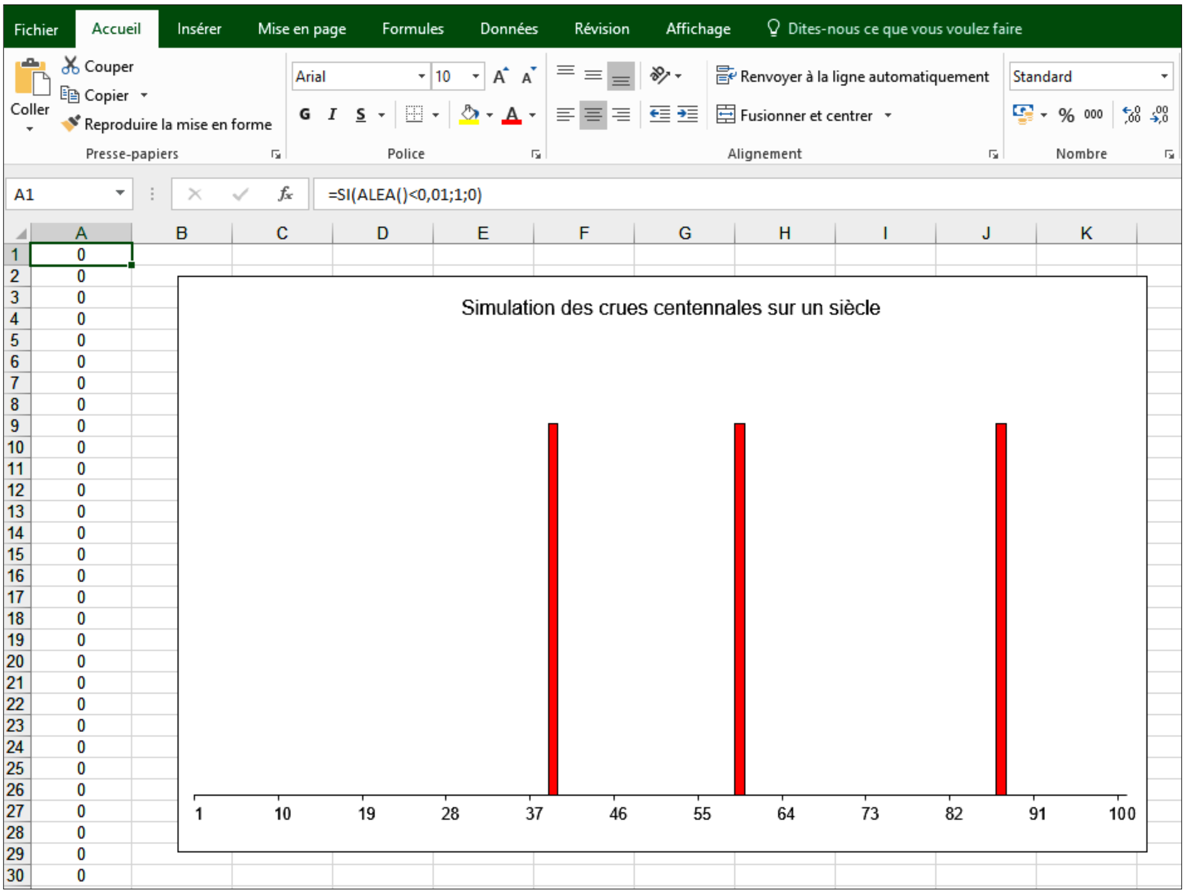
b) Donner d'autres moyens de simuler une crue centennale

Une réponse donnée : avec deux dés de 10 faces et on a une crue dès que les deux 10 tombent.
Un élève a même pris sur son temps d'EPI pour créer une simulation sur Scratch (voir le fichier téléchargeable sur le site académique).

c) Voici une formule =SI(ALEA()<0,01;1;0) qui permet de simuler sur un tableur l'arrivée d'une crue centennale.
Sur une feuille de calcul, simuler en colonne A les crues centennales survenant durant un siècle. Réaliser une représentation graphique en utilisant le « type histogramme ».
Appuyer sur F9 pour effectuer de nombreuses simulations.
– A-t-on dans la grande majorité des simulations, une et une seule crue centennale par siècle ?
– Dans un siècle, avez-vous observé plusieurs crues centennales à quelques années d'intervalle ?

Réponses des élèves

Les élèves sont bien obligés de répondre non et oui à ces questions. Avec la touche F9, ils ont bien vu que plusieurs crues pouvaient tomber en un siècle, jusqu'à 5 ! Personne n'a eu 6 sur le temps impartis mais ils ont essayé longtemps. Ils ont vu aussi que certaines décennies il pouvait y avoir plusieurs crues centennales.
Le professeur ne voulait pas aller trop loin (par manque de temps) et a choisi de ne pas leur faire simuler sur un grand nombre de siècles, il le fera plus tard en classe à partir d'une simulation d'élève. (Voir ci-dessous). Il pourra par exemple, grâce à un grand nombre de simulations, estimer la probabilité qu'il y ait exactement une crue centennale un siècle donné, deux crues centennales… La valeur exacte étant fournie par la loi binomiale, qui est vue en première.

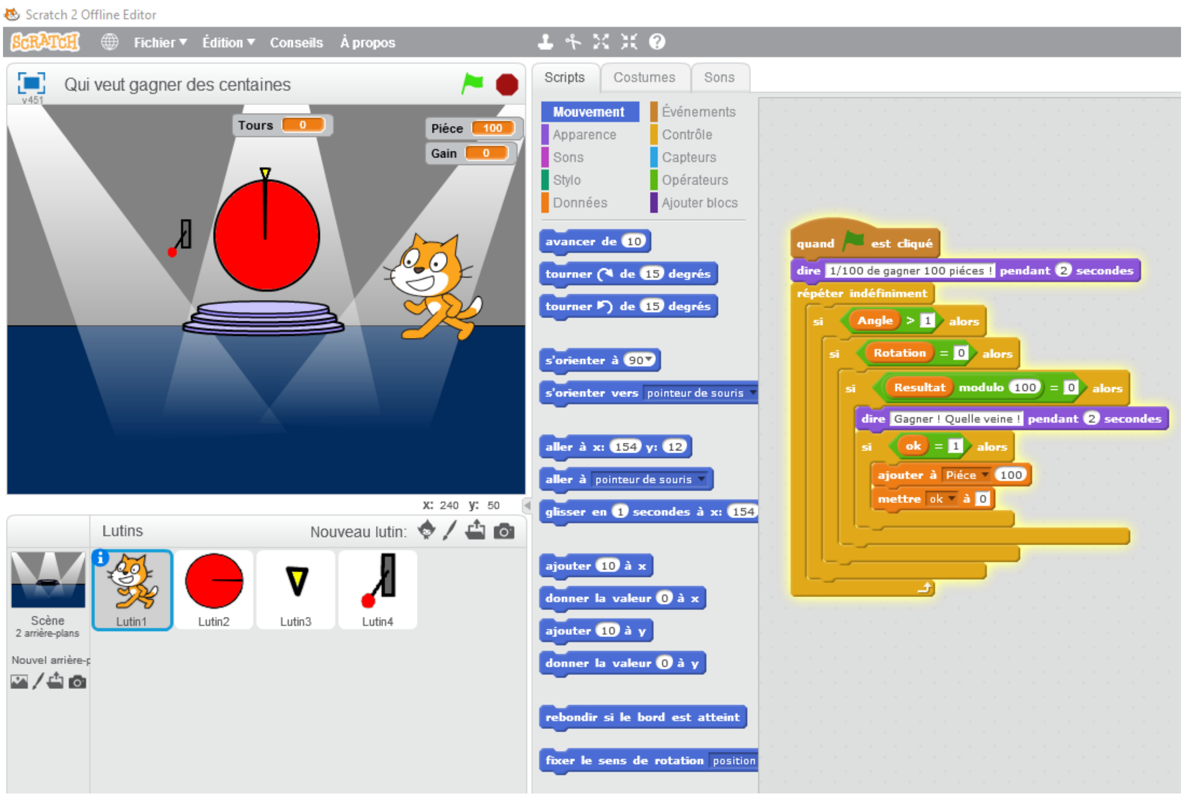


d) Souhaitez-vous modifier votre réponse à la question 2 ? Si oui, comment ?

Les élèves répondent qu'on ne peut donc rien prédire d'une année sur l'autre, le professeur parle d'« indépendance du passé ».
Certains élèves ont quand même redit qu'en 2002 le journaliste a eu tort de dire ça mais que finalement il avait quand même raison puisqu'en 2016 on a eu une crue centennale !
Idée d'« indépendance du passé » mais « non indépendance de l'avenir » ! (Mots d'élèves.)

Le professeur s'est rendu compte que la tâche proposée n'était pas facile pour les élèves mais nécessaire pour faire tomber les idées reçues. Le professeur a bien insisté sur le « **une chance sur cent en moyenne sans mémoire d'une année sur l'autre** ».
Mais les dires du journaliste n'ont pas été clairement contredits… certains élèves ont encore des doutes…
De plus le réchauffement climatique que l'on observe depuis un siècle et qui est bien présent dans la tête des élèves grâce à l'EPI sur la climatologie rend ce modèle aléatoire trop simple.

Travail d'élève sur Scratch au sein de l'EPI



Deuxième séance

Cette séance se déroule quelques semaines après la précédente.
Le professeur propose en classe de reprendre la simulation d'un élève au hasard. Il rappelle la situation-problème. Son choix est de faire simuler cette fois l'apparition d'une crue dite centennale sur 250 siècles. Il veut grâce à un grand nombre de simulations, estimer la

probabilité qu'il y ait exactement une crue centennale un siècle donné, deux crues centennales… La valeur exacte étant fournie par la loi binomiale, qui est vue en première. Pour cela il pose les questions suivantes et envoie un élève sur le tableur.

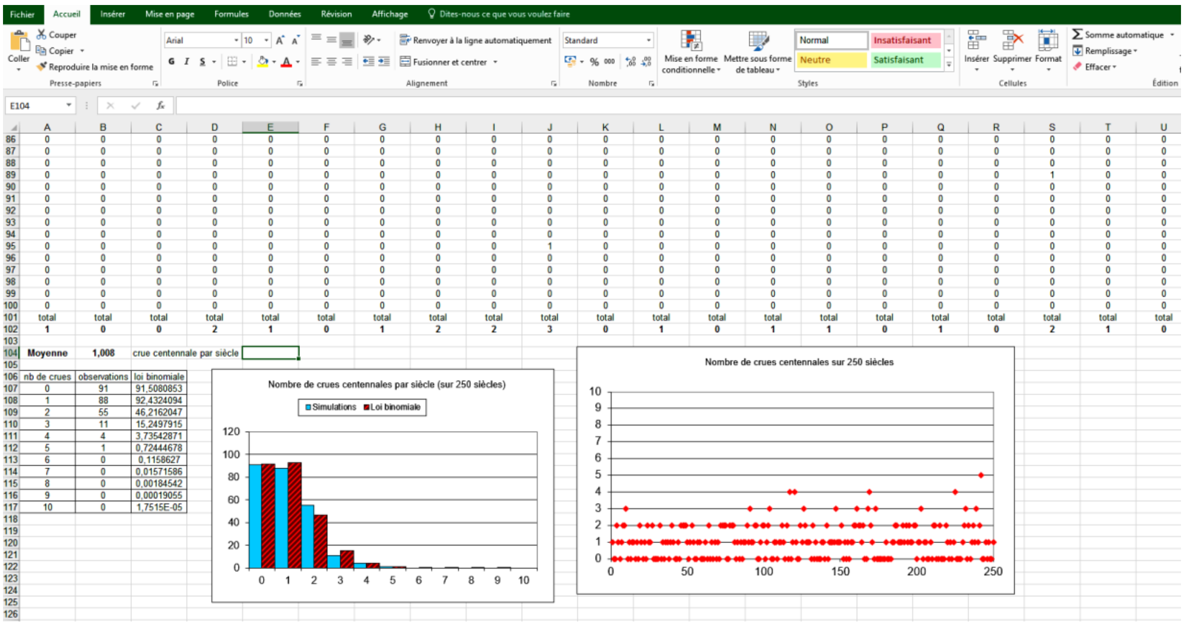
1) Si on fait la somme des 0 et des 1 de la colonne A, à quoi correspond cette somme ?
Discussion, ils trouvent sans aide.

2) Si on veut simuler 250 siècles, que faisons-nous ?
Discussion, ils trouvent sans aide.
Après sélection de la colonne A, on la recopie vers la droite jusqu'à la colonne IP pour simuler 250 siècles.

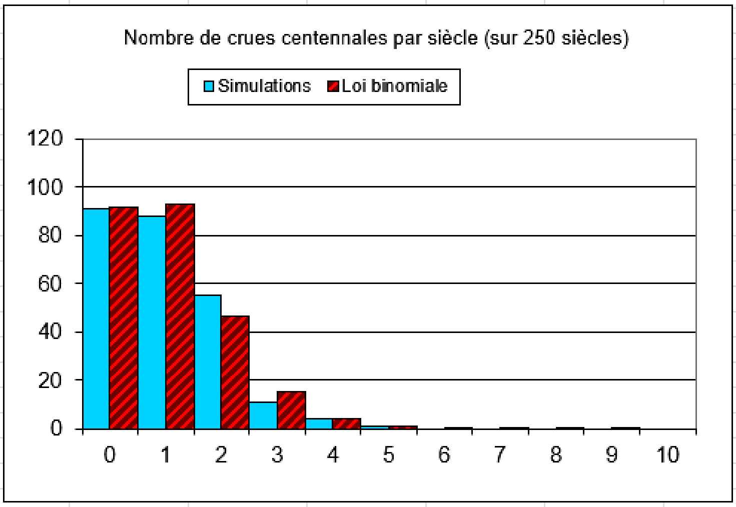
3) Si on veut calculer la moyenne du nombre de crues centennales par siècle comment le faisons-nous ?
Discussion et réinvestissement de la moyenne.
Calcul de la moyenne par la formule =SOMME(A102:IP102)/250.

4) Et si on effectue plusieurs fois F9. Que constatons-nous ?
Réponse des élèves : Ce nombre est toujours proche de 1, donc en moyenne sur 250 siècles on a bien une crue par siècle.

Rappelons que les élèves étaient très sceptiques devant les dires du journaliste, certains même lui donnaient raison. Donc pour la suite le professeur a choisi de dire aux élèves qu'il existe un moyen de modéliser la situation avec une loi mathématique. Il montre le dossier suivant :



nb de crues	observations	loi binomiale
0	91	91,5080853
1	88	92,4324094
2	55	46,2162047
3	11	15,2497915
4	4	3,73542871
5	1	0,72444678
6	0	0,1158627
7	0	0,01571586
8	0	0,00184542
9	0	0,00019055
10	0	1,7515E-05



Discussion sur ce tableau avec activation de la touche F9.
Les élèves constatent que les nombres de la colonne « observation » qui représentent le nombre d'apparition des crues sur 250 siècles varient autour d'un nombre « théorique » écrit dans la colonne de droite. (Certains veulent en savoir un peu plus sur ces nombres…).
Le professeur fait calculer les pourcentages d'apparition avec la valeur théorique (groupe de deux).

Nombre de crues	Pourcentage d'apparition en théorie
0	36,6 %
1	37 %
2	18,5 %
3	6,1 %
…	…

Les élèves trouvent donc qu'en « théorie » la probabilité qu'il y ait exactement une crue centennale par siècle est de 37 % environ. (Ils remarquent aussi que la probabilité qu'il n'y en ait pas du tout est d'environ 37 % aussi).
Et que donc (avec l'aide du professeur) dans la majorité des cas (63 %) on n'a pas une crue centennale par siècle !

Les élèves admettent donc que même si en moyenne on a une crue centennale par siècle on n'aura pas une crue centennale par siècle dans la majorité des cas ! Le journaliste ne peut donc pas dire en 2002 que depuis 1910 la probabilité d'avoir une crue centennale augmente d'année en année juste parce que presque un siècle s'est écoulé.

Ce que les élèves peuvent retenir

Sur l'échelle d'un siècle, les réalisations d'un événement ayant, selon le modèle de la crue centenale, chaque année une chance sur 100 de se produire conduit à des observations très variables. La « moyenne », une fois tous les 100 ans, n'a de sens que pour un grand nombre de siècles.

Niveau 3 d'apprentissage et exemples d'activités

– Observer la stabilisation des fréquences lorsqu'on augmente le nombre de répétitions de l'expérience aléatoire. Faire le lien entre fréquence et probabilité en fonction du nombre de répétition de l'expérience aléatoire. Calculer des fréquences pour estimer des probabilités.
– Concevoir des simulations simples.
– Utiliser des tableaux ou des arbres pour des calculs simples de dénombrement des cas.
– Calculer la probabilité de réalisation de deux événements s'excluant mutuellement et de deux événements complémentaires (règle de la somme).
– Calculer la probabilité de réalisation de deux événements indépendants (règle du produit).
– Analyser des conditions nécessaires pour qu'un jeu de hasard soit équilibré, sur la base de la notion de résultats équiprobables et non équiprobables.
– Traiter des expériences aléatoires à deux étapes.

Le niveau 3 comporte des attendus de fin de cycle 4 à propos desquels une autonomie des élèves n'est visée qu'en classe de troisième : conception de simulations simples, avec le tableur ou le logiciel de programmation Scratch, réalisation ou interprétation d'un graphique montrant la stabilisation des fréquences d'un événement en fonction du nombre de répétitions indépendantes de l'expérience aléatoire. Certains éléments du niveau 3 ne seront des attendus qu'en classe de seconde : utilisation d'arbres simples, application de la règle de la somme ou du produit pour calculer des probabilités.

Expérimentation avec des legos dans un manuel allemand (début de cycle 4 français)

Dans le manuel allemand suivant, en vigueur en classe de 7^{e} (équivalent de la 5^{e} française) dans le Land de Rhénanie-Westphalie, une activité d'introduction à l'estimation d'une probabilité par l'observation des fréquences est proposée en lançant des Legos de type 4 : la face du dessus est codée 4, celle de dessous 1, et les faces latérales 2, 3, 5 et 6.

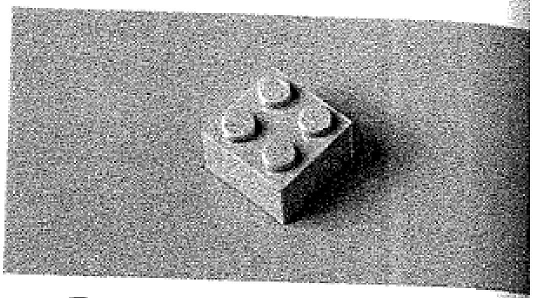
4.2.2 Schätzen von Wahrscheinlichkeiten aus relativen Häufigkeiten – Prognose

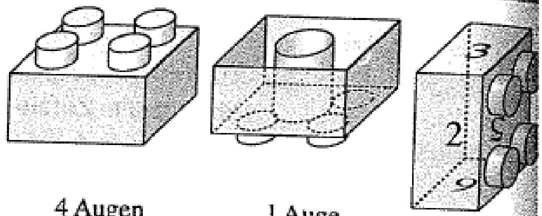
Philine und Sebastian wollen Mensch-ärgere-dich-nicht spielen, doch leider ist nirgendwo ein Würfel auffindbar.

Sebastian schlägt vor: „Lass uns doch einen Lego-Vierer zum Würfeln nehmen. Die vier Nippel oben sind vier Augen, der Nippel unten ist ein Auge. Die Seitenflächen beschriften wir mit 2, 3, 5 und 6."

Doch Philine hat Bedenken: „Beim gewöhnlichen Würfel erscheint die Sechs in etwa genauso häufig wie die anderen Augenzahlen auch. Mit diesem sonderbaren Würfel erhält man bestimmt nicht so viele Sechsen."

Hier stimmt Sebastian zu. Doch haben beide verschiedene Vermutungen, welche Augenzahl am häufigsten erscheinen wird.





4 Augen 1 Auge

Philine:

„Am häufigsten werden wir Vieren würfeln, da die Unterseite des Steines am größten und sehr standsicher ist."

Sebastian:

„Beim Werfen wird es sehr viele Einsen geben, da der Stein oft auf den vier schweren Nippeln landet."

Philine schlägt zur Entscheidung vor: „Lass uns vor dem Spiel etliche Male würfeln und schauen, wie oft die einzelnen Augenzahlen erscheinen."

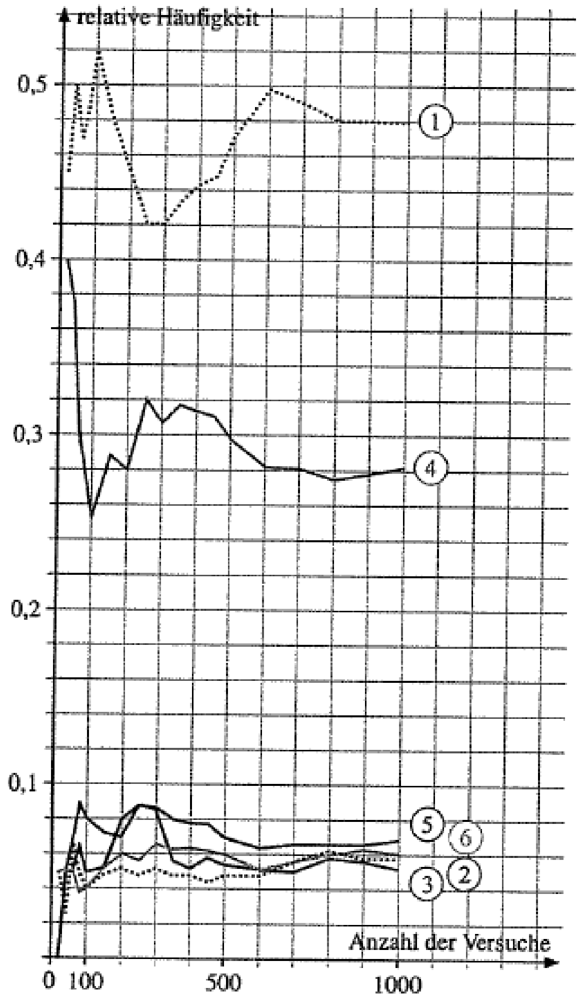
Ergebnisse des Entscheidungsversuchs:

Gesamtzahl der Würfe	Anzahl der Würfe mit Augenzahl					
	1	2	3	4	5	6
20	9	1	1	8	0	1
40	20	1	2	13	2	2
60	28	4	4	18	3	3
80	39	4	7	22	5	3
100	52	4	8	27	5	4
150	72	8	11	43	8	8
200	90	11	14	57	16	12
250	105	12	17	80	22	14
300	126	16	20	92	26	20
350	152	17	20	111	28	22
400	177	19	21	126	31	26
450	201	20	26	140	35	28
500	235	24	27	149	35	30
600	299	29	32	169	39	32
700	343	39	35	197	46	40
800	383	50	46	220	53	48
900	432	52	50	250	59	57
1000	478	58	52	282	69	61

Auswertung: Um die erhaltenen absoluten Häufigkeiten besser miteinander vergleichen zu können, berechnen Sebastian und Philine jeweils die relativen Häufigkeiten für die einzelnen Augenzahlen. Damit zeichnen sie für jede Augenzahl den Graphen der Zuordnung
Anzahl der Würfe → relative Häufigkeit
(Bild rechts). Diesem Graphen entnehmen wir: Zu Beginn der Würfelserie treten noch große Schwankungen der relativen Häufigkeiten auf. Je öfter aber gewürfelt wird, desto weniger ändern sich die relativen Häufigkeiten:
Augenzahl 1 tritt am häufigsten auf in ungefähr 48% der Fälle, Augenzahl 4 in 28% der Fälle. Die übrigen Augenzahlen sind gleichberechtigt und treten alle in ungefähr 6% der Fälle auf.
Ein Mensch-ärgere-dich-nicht-Spiel mit diesem Lego-Vierer als Würfelersatz würde also im Mittel lange Wartezeiten auf die Sechs ergeben. Aber zu diesem Spiel ist es nun für Sebastian und Philine auch schon zu spät geworden…

Ergebnis: Sebastians Vermutung stimmt. Mit dem Lego-Vierer würfelt man am häufigsten Einsen.

Anregung: Wirf doch selber einmal mit einem Lego-Vierer und vergleiche deine Ergebnisse mit denen von Sebastian und Philine.

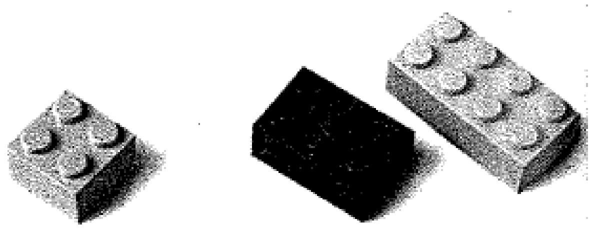


Des graphiques indiquant la fréquence de chaque face en fonction du nombre de lancers sont tracés. En exercice, on demande d'estimer les probabilités de sortie de chaque face des Legos de type 6 et 8.

Ermittle die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ergebnisse beim Werfen eines

a) Lego-Sechsers; **b)** Lego-Achters.

Schätze zuvor und vergleiche mit dem Lego-Vierer.



Un exercice analogue avec des capsules de bouteilles est proposé :

b) Bei einer Versuchsreihe mit einem Kronenkorken wurden folgende Ergebnisse erzielt:

Anzahl der Würfe	50	100	200
Ergebnis: *liegt auf dem Rücken*	31	57	118
Ergebnis: *liegt auf dem Rand*	19	43	82

Berechne die relativen Häufigkeiten der beiden Ergebnisse und bestimme näherungsweise die Wahrscheinlichkeit für das Ergebnis *liegt auf dem Rücken*.
Beurteile danach die Seitenwahl mit einem Kronenkorken.

Pile ou face avec Scratch

A Pré-requis

Cette activité a été proposée à des élèves de 4ème / 3ème familiarisés avec les points suivants :

- notion de hasard ;
- notions de statistique (tableau, fréquence, diagramme cartésien) ;
- proportionnalité (principe, pourcentage) ;
- usage de l'environnement Scratch ;
- usage du tableur grapheur (élaboration diagramme cartésien) ;
- pratique fréquente de tâches à prise d'initiative ;
- habitude de participation à des débats et exposés concernant des sujets de mathématiques ;

B Le matériel nécessaire

- Une fiche d'énoncé

PROPORTIONNALITE – GRANDEURS COMPOSEES **Cycle 4**

TAPI

Tâche à prise d'initiative 5 : Pile ou face

a. • Ouvrir le fichier « pile_ face.sb2 » avec le logiciel **Scratch**.

• Cliquer sur l'icône pour passer en mode plein écran.

Ce fichier simule un tirage au sort réalisé avec une pièce dont les faces équiprobables sont respectivement appelées « Pile » et « Face ».

b. La touche « Espace » déclenche 10 tirages de « Pile ou face ». Le pourcentage de piles s'affiche dans le tableau « Pourcentage de piles »

• Appuyer plusieurs fois sur la touche espace pour réaliser plusieurs simulations de 10 tirages de « Pile ou face ».

• A quoi correspond un pourcentage de 40% ? Est-ce possible ?

....

• A quoi correspond un pourcentage de 60% ? Est-ce possible ?

....

• A quoi correspond un pourcentage de 100% ? Est-ce possible ?

....

• A quoi correspond un pourcentage de 0% ? Est-ce possible ?

....

c. La touche « R » déclenche 20 000 tirages de « Pile ou face ». Tous les 100 tirages, le pourcentage de piles calculé sur l'ensemble des tirages est ajouté dans le tableau « Pourcentage de piles ».

• Appuyer sur la touche « R » et attendre la fin des tirages au sort.

• Exporter le tableau « Pourcentage de piles » en cliquant droit « Exporter » sur le tableau.

d.

• Ouvrir le fichier créé au format « .txt » avec le logiciel **Bloc-notes**.

• Cliquer droit « Sélectionner tout ». • Cliquer droit « Copier ».

e.

• Ouvrir le fichier « pile_face.ods » avec le logiciel **LibreOffice**.

• Cliquer droit « Coller » dans la cellule B2. • Cliquer « Ok ».

• Observer la courbe. Décrire l'évolution du pourcentage de pile en fonction du nombre de tirages.

....

....

Pouvait-on prévoir cette évolution ? Justifier. ....

....

....

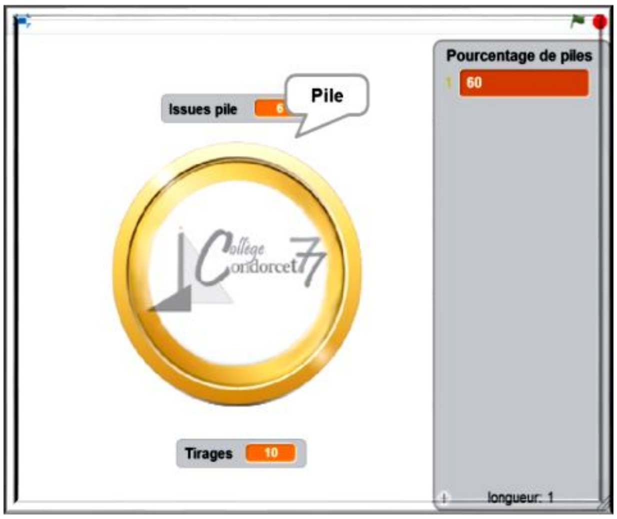
f.

Faire valider son écran et son cahier par le professeur.

- Un ordinateur.
- Un dispositif de projection (TNI…).
- Un clavier sans fil.
- Une souris sans fil.
- Le logiciel Scratch.
- Le logiciel Bloc-notes (Notepad).
- Le logiciel Libre Office Calc.

C Fichier de simulation Scratch

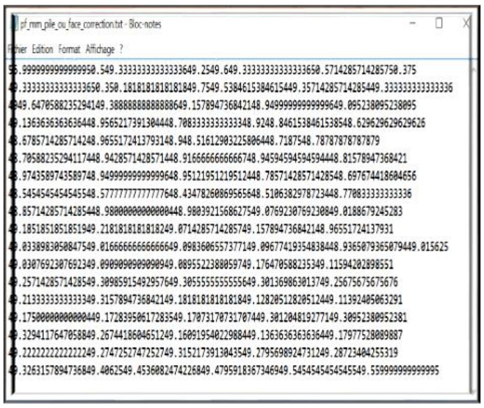
Un fichier a été élaboré avec Scratch (https://scratch.mit.edu) : pile_face.sb2.



Commandes :
[Espace]→Effectue la simulation assez lente de 10 jets d'une pièce équiprobable et calcule le pourcentage de piles.
[R]→Effectue la simulation plus rapide de 20 000 jets d'une pièce équiprobable et calcule un nouveau pourcentage total de piles toutes les 100 épreuves.
[Clic droit > Exporter]→Sauvegarde les valeurs de la liste « Pourcentage de piles » dans un fichier texte au format « .txt ».

D Fichier d'exportation (Notepad)

Le fichier au format « .txt » généré à partir de la simulation s'ouvre avec l'utilitaire Bloc-notes (Notepad).

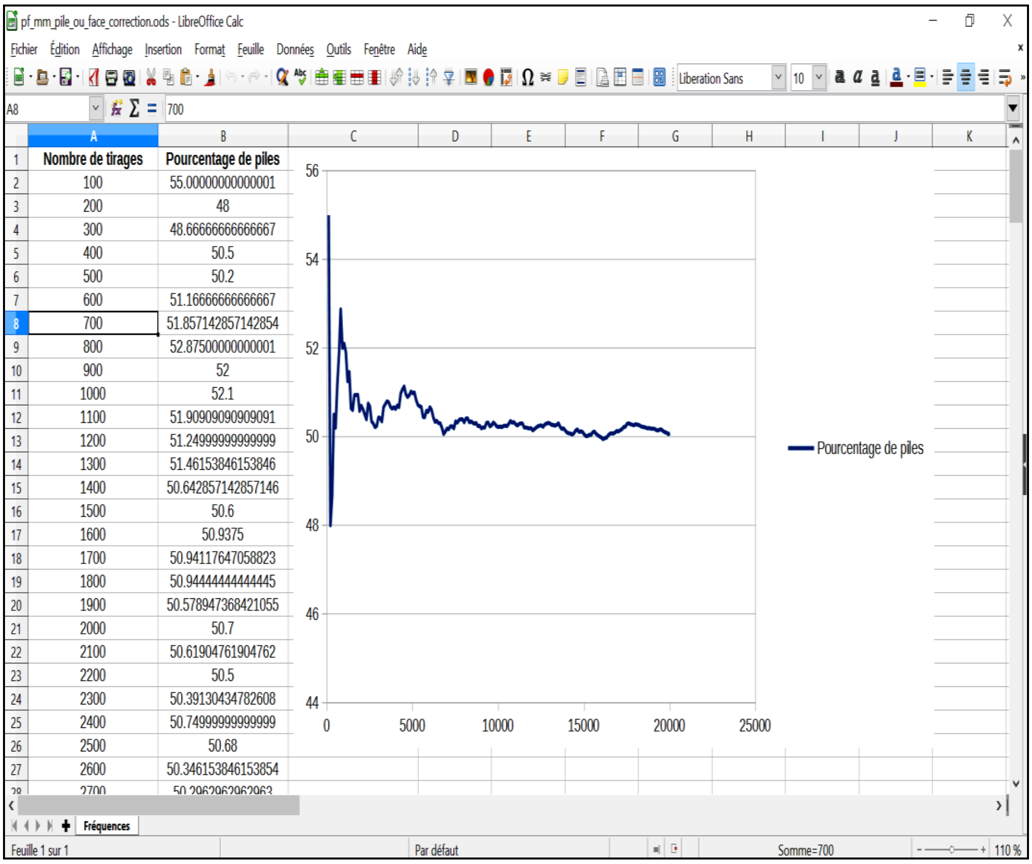


<u>Commandes :</u>
[Clic droit > Tout sélectionner]→Sélectionne à l'écran l'intégralité du contenu du fichier.
[Clic droit > Copier]→Copie le contenu sélectionné dans la mémoire de l'ordinateur (presse-papier).

E Fichier d'analyse (Calc)

Un fichier de tableur grapheur a été élaboré pour s'ouvrir avec le logiciel Libre Office Calc : pile_face.ods.

(Remarque technique : Le problème de compatibilité de format est résolu dans la colonne AA avec des formules du type =CNUM(SUBSTITUE(B2;".";",")). Le diagramme cartésien a ses ordonnées prises dans la colonne AA à la place de la colonne B. Il n'a pas été jugé utile de sensibiliser les élèves à cet aspect.)



Nombre de tirages	Pourcentage de piles
100	55.00000000000001
200	48
300	48.66666666666667
400	50.5
500	50.2
600	51.16666666666667
700	51.857142857142854
800	52.87500000000001
900	52
1000	52.1
1100	51.90909090909091
1200	51.24999999999999
1300	51.46153846153846
1400	50.642857142857146
1500	50.6
1600	50.9375
1700	50.94117647058823
1800	50.94444444444445
1900	50.578947368421055
2000	50.7
2100	50.61904761904762
2200	50.5
2300	50.39130434782608
2400	50.74999999999999
2500	50.68
2600	50.346153846153854

<u>Commandes :</u>
[Clic dans la cellule B2]→Sélectionne la cellule B2.
[Clic droit > Coller]→Colle le contenu de la mémoire de l'ordinateur (presse-papier) dans la cellule sélectionnée (et par extension dans les cellules adjacentes).

F L'organisation de la classe

Les différentes actions sur l'ordinateur sont projetées à l'écran.

Un débat est organisé :

- Un élève président répartit et pointe la participation des autres élèves.
- Un élève à qui la parole est attribuée reçoit momentanément le clavier et la souris pour interagir avec l'écran.
- Le professeur reformule, facilite et précise les différentes interventions.

G Compte-rendu de déroulement

L'activité s'est déroulée sur une séance de 55 minutes en passant par les étapes suivantes :

● Déroulement de la simulation de 10 tirages.
Le débat autour des questions du type « A quoi correspond un pourcentage de 40% ? » a permis de confronter les conceptions des élèves à propos de la notion de hasard, mais aussi d'investir à nouveau la notion de pourcentage.

● La simulation de 20 000 tirages a été lancée.

● Débat concernant l'analyse de certains aspects du script.
Il a été mené en attendant que les 20 000 épreuves soient réalisées.
L'analyse a tout d'abord porté sur le script pour 10 tirages.
Les élèves en ont peu à peu explicité les différentes composantes (différents types de blocs, variables…).
Le bloc de calcul 

a été relié à la notion de pourcentage. Le bloc logique 

a été examiné.
Ensuite, les différences ont été cherchées avec le script pour 20 000 tirages. Le bloc logique 

, qui permet l'affichage toutes les 100 épreuves, a été relié à la notion de divisibilité.
Enfin, la discussion s'est conclue à propos de la rapidité d'exécution du programme et des pistes pour accélérer la simulation.

● Déroulement de l'exportation des valeurs et récupération de ces valeurs dans le tableur.
Ces manipulations ont été facilement réalisées par les élèves volontaires.

● Débat concernant l'analyse du diagramme cartésien généré.
Il a permis aux élèves d'une part de constater les fortes variations pour un faible nombre de tirages, puis d'autre part la stabilisation vers la valeur théorique attendue.
Il a été conclu qu'il existe deux méthodes pour déterminer une probabilité. On peut naturellement étudier le phénomène en soi pour dénombrer directement une probabilité. Une deuxième méthode consiste à effectuer un très grand nombre d'épreuves dans le but d'estimer une probabilité par une fréquence statistique.
Les discussions finales ont porté sur des applications possibles de ce dernier principe (sondages, détermination de la composition d'un astre à partir de la lumière reçue par un capteur…).

Le camion pizza

La situation suivante est issue de la thèse de Gwendolyn ZIMMERMANN – *Students'reasoning about probability, simulations during instruction* – 2002.

Énoncé
On donne à Stan le problème suivant à résoudre.

> Un camion pizza a établi que 60 % de ses commandes par téléphone concernent des pizzas avec viande (bœuf, salami, etc.) et que les 40 % restant sont des pizzas sans viande (fromage, végétarienne, etc.). On suppose que les commandes sont indépendantes.
> Quelle est la probabilité que les deux prochaines pizzas commandées par téléphone soient toutes deux avec viande ?

Pour estimer cette probabilité, Stan utilise des boules de couleur. Il prend 6 boules rouges pour les pizzas avec viande et 4 boules vertes pour les pizzas sans viande. Il met les 10 boules dans un sac, le remue, prend au hasard une boule, note sa couleur et la remet dans le sac. Il effectue 50 fois l'expérience.

1. Pensez vous que les expériences de Stan lui permettront d'estimer la probabilité que les deux prochaines pizzas commandées sont avec viande ? Justifier.
Si vous ne pensez pas que les expériences de Stan fonctionnent, comment les modifieriez-vous pour estimer la probabilité que les deux prochaines pizzas commandées sont avec viande ?

2. On suppose que Stan a mené son expérience et obtenu les résultats suivants :
RRRVRRRVVVVRVRRVVVVRRRVRVRRVVVRRVVVRRVVRRRVVRVRVVR
Pouvez-vous utiliser ces résultats pour estimer la probabilité que les deux prochaines pizzas commandées sont avec viande ? Si la réponse est oui, effectuer les calculs et expliquez votre raisonnement. Si la réponse est non, expliquez pourquoi.

Prolongement possible
3. Reproduire la feuille de calcul suivante pour simuler 1 000 réalisations de l'expérience consistant à tirer au hasard et avec remise deux boules dans une urne contenant 6 boules rouges et 4 boules vertes. L'instruction simulant un tirage est =SI(ALEA()<0,6;"R";"V").
L'instruction entrée en D3 et recopiée vers le bas est =CONCATENER(B3;C3).

B3 =SI(ALEA()<0,6;"R";"V")

	A	B	C	D
1	**Camion pizza**			
2	expérience	issue 1	issue 2	résultat
3	1	V	R	VR
4	2	V	V	VV
5	3	R	R	RR
6	4	R	R	RR
7	5	R	V	RV
8	6	R	V	RV

4. Utiliser la feuille de calcul pour estimer la probabilité que les deux prochaines pizzas commandées sont avec viande.

5. Quelle opération directe permet d’obtenir la probabilité recherchée avec les données « 60 % des pizzas sont avec viande, 40 % sont sans viande » ?

Éléments de réponse

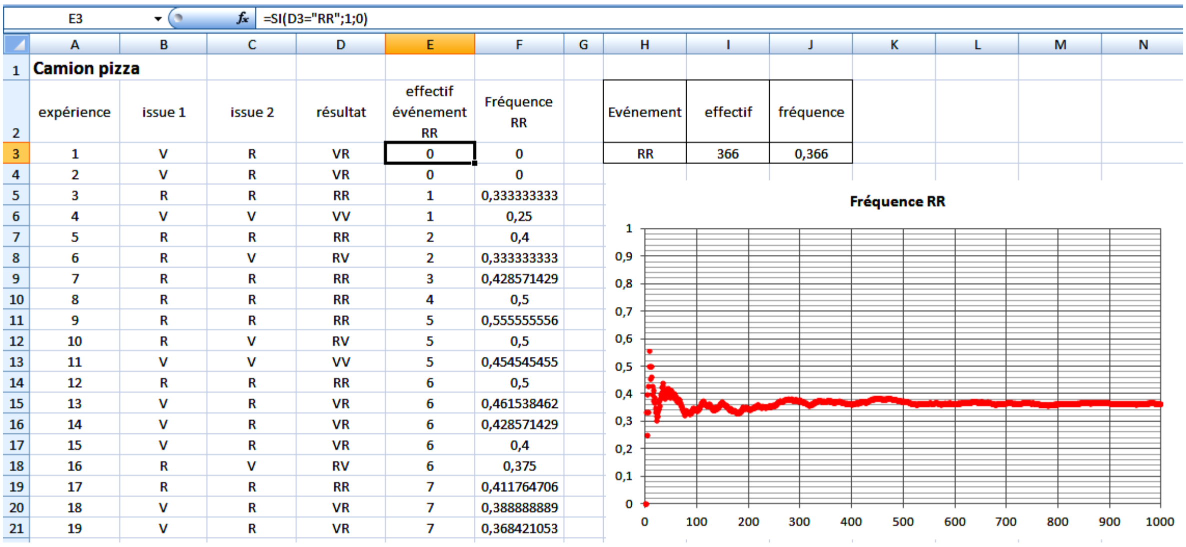
1. On peut penser qu’il faudrait plutôt tirer deux boules avec remise.

2. On peut regrouper les observations deux par deux.

RR RV RR RV VV VR VR RV VV VR RR VR VR RV VV RR VV VR RV VR RR VV RV RV VR

On observe 5 résultats RR sur 25 couples d’où une fréquence de 0,2. On peut estimer que la probabilité cherchée est de l’ordre de 0,2. Mieux vaudrait cependant effectuer davantage d’expériences.

4. On peut calculer la fréquence de l’événement « RR » en utilisant NB.SI par exemple mais aussi étudier l’évolution de la fréquence de cet événement en fonction du nombre de répétitions de l’expérience (jusqu’à 1 000).



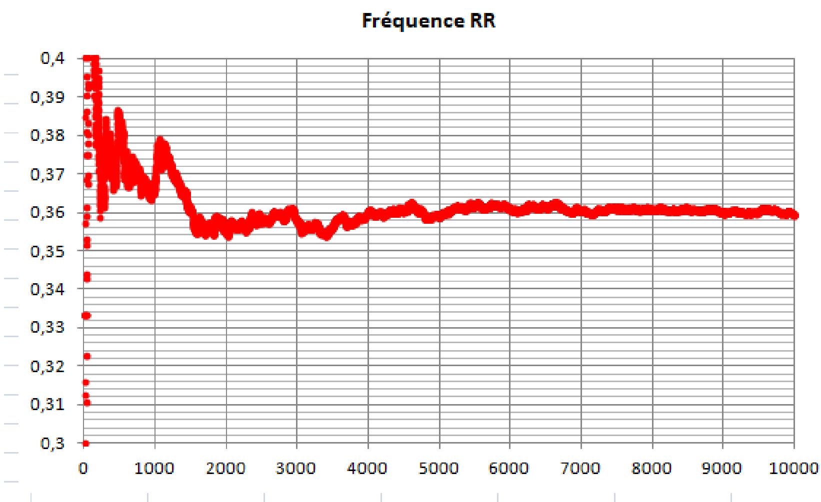
E3 =SI(D3="RR";1;0)

Camion pizza

expérience	issue 1	issue 2	résultat	effectif événement RR	Fréquence RR
1	V	R	VR	0	0
2	V	R	VR	0	0
3	R	R	RR	1	0,333333333
4	V	V	VV	1	0,25
5	R	R	RR	2	0,4
6	R	V	RV	2	0,333333333
7	R	R	RR	3	0,428571429
8	R	R	RR	4	0,5
9	R	R	RR	5	0,555555556
10	R	V	RV	5	0,5
11	V	V	VV	5	0,454545455
12	R	R	RR	6	0,5
13	V	R	VR	6	0,461538462
14	V	R	VR	6	0,428571429
15	V	R	VR	6	0,4
16	R	V	RV	6	0,375
17	R	R	RR	7	0,411764706
18	V	R	VR	7	0,388888889
19	V	R	VR	7	0,368421053

Evénement	effectif	fréquence
RR	366	0,366

On peut prolonger la simulation jusqu’à une taille 10 000.



5. $0{,}6 \times 0{,}6 = 0{,}36$.

Lancers francs

La situation suivante est issue de la thèse de Gwendolyn ZIMMERMANN – *Students'reasoning about probability, simulations during instruction* – 2002.

Énoncé
On demande à Laura de mettre en œuvre une simulation pour le problème suivant.

> Les statistiques de basket de Sandra montrent que lorsqu'elle est à la ligne de lancers francs, celle-ci réussit environ 70 % de ses lancers francs.
> Quelle est la probabilité que Sandra manque ses deux lancers francs ?

Pour estimer cette probabilité, Laura utilise des boules de couleur. Elle prend 7 boules rouges pour les lancers francs réussis et 3 boules bleues pour les lancers francs manqués. Elle met les 10 boules dans un sac, le remue, prend au hasard une boule, note sa couleur et la remet dans le sac. Elle effectue 50 fois l'expérience.

1. Pensez vous que les expériences de Laura lui permettront d'estimer la probabilité que les deux lancers francs soient manqués ? Justifier.
Si vous ne pensez pas que les expériences de Laura fonctionnent, comment les modifieriez-vous pour estimer la probabilité que les deux lancers francs soient manqués ?

2. On suppose que Laura a mené son expérience et obtenu les résultats suivants :
RBBBBRRBRBBBRRRRBBRBRRRRRRBBRBRRRBBRRRRRBBBRBRRBRR
Pouvez-vous utiliser ces résultats pour estimer la probabilité que les deux lancers francs soient manqués ? Si la réponse est oui, effectuer les calculs et expliquez votre raisonnement. Si la réponse est non, expliquez pourquoi.

Variation des petits échantillons et stabilisation des grands

Les questions suivantes demandent aux élèves de comparer des probabilités. Leurs réponses a priori peuvent permettre de détecter des biais de conception concernant la loi des grands nombres.
Dans un second temps, l'observation de simulations permet de connaître la bonne réponse à chaque question.

Énoncé
On lance une pièce supposée équilibrée. Pour chacune des questions suivantes, les deux événements ont-ils la même probabilité ou lequel est le plus probable ? Donnez vos raisons.
a) « Obtenir exactement 5 faces quand on lance la pièce 10 fois » ou « obtenir exactement 500 faces quand on lance la pièce 1 000 fois » ?
b) « Obtenir 4, 5 ou 6 faces quand on lance la pièce 10 fois » ou « obtenir 499, 500 ou 501 faces quand on lance la pièce 1 000 fois » ?
c) « Obtenir 4, 5 ou 6 faces quand on lance la pièce 10 fois » ou « obtenir entre 400 et 600 faces quand on lance la pièce 1 000 fois » ?

Éléments de réponse
a) L'événement le plus probable est : « obtenir exactement 5 faces quand on lance la pièce 10 fois ».
b) L'événement le plus probable est : « obtenir 4, 5 ou 6 faces quand on lance la pièce 10 fois ».
c) L'événement le plus probable est : « obtenir entre 400 et 600 faces quand on lance la pièce 1 000 fois ».
Exemple de simulation à l'appui des affirmations précédentes (échantillon de taille 1 000).

EPX5 =EPV5+SI(SOMME(EPW4:EPW13)=5;1;0)

	A	B	C	D	EPU	EPV	EPW	EPX
1	**Pile ou face**							
2	simulation	no 1	simulation	no 2	simulation	no 999	simulation	no 1000
3	pile ou face		pile ou face		pile ou face		pile ou face	
4	0	événement a 1)	1	événement a 1)	1	événement a 1)	1	événement a 1)
5	1	**1**	1	**1**	1	**435**	1	**435**
6	1	événement a 2)	0	événement a 2)	1	événement a 2)	1	événement a 2)
7	0	**0**	1	**0**	0	**51**	1	**51**
8	1	événement b 1)	1	événement b 1)	1	événement b 1)	0	événement b 1)
9	0	**1**	1	**1**	0	**1227**	1	**1227**
10	0	événement b 2)	1	événement b 2)	1	événement b 2)	1	événement b 2)
11	1	**0**	0	**0**	1	**157**	0	**157**
12	1	événement c 1)	1	événement c 1)	1	événement c 1)	1	événement c 1)
13	0	**1**	1	**1**	0	**1227**	1	**1227**
14	0	événement c 2)	0	événement c 2)	1	événement c 2)	0	événement c 2)
15	0	**1**	0	**2**	1	**1909**	0	**1910**
16	1		0		1		0	
17	0		0		1		1	

Les élèves qui surestiment la prédictibilité d'un événement individuel et ceux qui ont une mauvaise conception de la variabilité sur un petit échantillon et de la stabilisation sur un grand échantillon répondront mal à la question a).

Les questions b) et c) peuvent permettre d'identifier les élèves qui apprécient mal l'importance des fréquences des issues par rapport à leur effectif (3 issues sur 11 pour le nombre de faces sur 10 lancers et 3 issues sur 1 001 pour le nombre de faces sur 1 000 lancers).

Les élèves peuvent répondre mal à la question b) s'ils savent qu'il y a une stabilisation à long terme vers 0,5 (la moitié des lancers à peu près sont des faces) mais raisonnent dans l'absolu et non en relatif : variabilité plus faible pour 1 000 lancers mais très petit nombre relatif d'issues concernées.

Une réponse correcte à la question c) peut montrer que l'élève sait que bien que les fréquences des issues concernées soient analogues le nombre de face est plus proche de la moitié lorsqu'il y a un grand nombre de lancers.

Conclusion

Durant l'année scolaire 2016/2017, certains professeurs de mathématiques de l'académie de Créteil, membres du groupe de réflexion académique sur l'enseignement des mathématiques au cycle 4, ont expérimenté différentes approches possibles des probabilités, permises par les nouveaux programmes. On a expérimenté ainsi, sur le terrain, la mise en œuvre des deux principes fondamentaux que sont, d'une part, la prise en compte des a priori des élèves puis, d'autre part, l'appui sur une double démarche, empirique, avec des expériences et des simulations, et théorique, avec une mise en place progressive de définitions et de principes de calcul.
Ces expérimentations, évoquées ici, ont suscité beaucoup d'enthousiasme, tant des professeurs que de leurs élèves et le travail se poursuit durant cette année 2017/2018.

Bibliographie

[1] BLEIN Christelle, PINET Isabelle – Entre hasard et déterminisme : un jeu de dé pour apprendre l'aléatoire en cycle 3 – www.statistix.fr – 2007.
[2] Bulletin officiel de l'Éducation nationale – *Programmes pour le cycle 4* – BO spécial n° 11 du 26 novembre 2015.
[3] IREM de Paris-Diderot – *Journée « Maths Monde » consacrée aux probabilités* – http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/calendrier/27_mai_2009_journee_euromaths/
[4] JONES Graham, THORNTON Carol – *An overview of research into the teaching and learning of probability* – 2005.
[5] STEINBRING Heinz – *The theoretical nature of probability in the classroom* – 1991.
[6] VERDIER Jacques – *Le hasard au collège* – Bulletin APMEP n° 484 – 2009.
[7] ZIMMERMANN Gwendolyn – *Students'reasoning about probability, simulations during instruction* – 2002.